Plaquette 3 – Propriétés de l'intégrale, inégalités et formules de Taylor

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour **majorer ou encadrer** une intégrale, on encadre l'intégrande puis on utilise la **croissance** de l'intégrale (bornes dans le bon sens !). Pour montrer qu'une fonction est **nulle**, on fait apparaître l'intégrale d'une fonction **continue positive** d'intégrale nulle. Pour une **limite** d'intégrales, on majore l'écart à la limite supposée, ou l'on intègre par parties pour faire apparaître un facteur $\frac{1}{n}$. Les **formules de Taylor** avec reste intégral transforment une approximation polynomiale en inégalité contrôlée.

Exercice 1 – Positivité stricte

a) Soit f continue et positive sur $[a,b]$ ($a<b$), d'intégrale nulle. Montrer que $f=0$ (raisonner par l'absurde avec un point x_0 où $f(x_0)>0$).

b) Montrer que le résultat est faux sans continuité.

c) Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ et $\int_0^1 f^2=\frac{1}{3}$. Montrer que $f(x)=x$.

d) Soit f continue telle que $\int_a^b fg=0$ pour toute g continue. Montrer que $f=0$.

Exercice 2 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f, g continues sur $[a,b]$ ($a<b$).

a) Montrer que $P(\lambda)=\int_a^b (f+\lambda g)^2$ est un polynôme de degré au plus 2, positif sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire $\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

c) Pour f continue et strictement positive, montrer que $\int_a^b f \cdot \int_a^b \frac{1}{f} \ge (b-a)^2$.

d) Vérifier c) pour $f(x)=x$ sur $[1,2]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

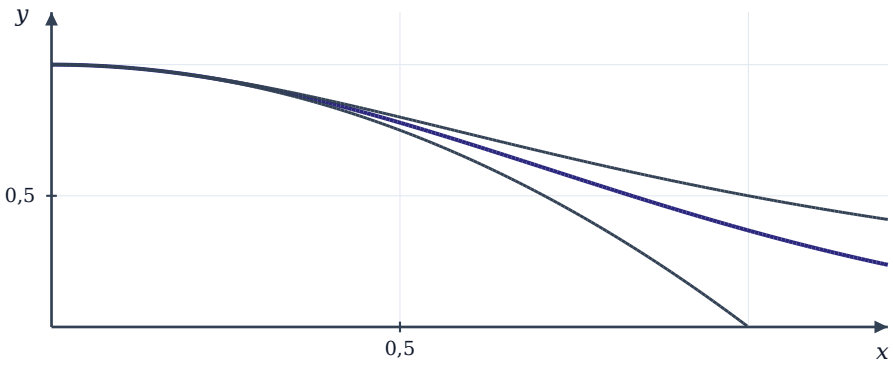
Exercice 3 – Encadrer une intégrale non calculable

Soit $G = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (pas de primitive usuelle).

a) Montrer que $1 - u \le \mathrm{e}^{-u} \le \dfrac{1}{1+u}$ pour $u \ge 0$.

b) En déduire $\dfrac{2}{3} \le G \le \dfrac{\pi}{4}$.

c) Donner une valeur approchée de G avec l'incertitude correspondante.



e^(−x²) (épaisse) entre 1 − x² et 1/(1 + x²)

Exercice 4 – Intégrales de $x^n f(x)$

Soit f continue sur $[0,1]$ et $u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $|u_n| \le \dfrac{M}{n+1}$ avec $M = \sup_{[0,1]} |f|$. En déduire $u_n \to 0$.

b) On suppose f de classe C^1. Par parties, montrer que
$(n+1)u_n = f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,\mathrm{d}x$.

c) En déduire $n u_n \to f(1)$.

d) Application : $f(x) = \mathrm{e}^x$. Vérifier numériquement : $10u_{10} \approx 2{,}280$, $1000u_{1000} \approx 2{,}713$.

Exercice 5 – Limite d'une suite d'intégrales

Soit $J_n = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$ pour $n \ge 1$.

a) Calculer J_1 et J_2.

b) Montrer que $0 \le 1 - J_n \le \dfrac{1}{n+1}$.

c) En déduire la limite de (J_n).

d) Vérifier avec $J_5 \approx 0{,}8883$ et $J_{10} \approx 0{,}9381$.

Exercice 6 – Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f de classe C^1 sur $[a,b]$.

a) Par parties, montrer que $\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Application : limite de $\int_0^{\pi} \dfrac{\sin(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

c) Calculer $\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ et vérifier directement qu'elle tend vers 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Interpréter en termes d'oscillations.

Exercice 7 – Formule de la moyenne

a) Soient f, g continues sur $[a,b]$ avec $g \geq 0$. En encadrant f par $m = \min f$ et $M = \max f$, montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

b) En déduire $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 – Taylor avec reste intégral

a) Pour f de classe C^2, montrer par une intégration par parties que $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$.

b) On admet la formule à l'ordre n. L'appliquer à exp en $a=0$, $x=1$ et montrer que $0 < \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$.

c) Combien de termes faut-il pour obtenir e à 10^{-6} près (utiliser $\mathrm{e} \leq 3$) ?

Exercice 9 – Irrationalité de e

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et l'on admet, d'après l'exercice précédent, $0 < \mathrm{e} - S_n \leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$.

a) Supposons $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A = q!\,(\mathrm{e} - S_q)$ est un entier.

b) Montrer que $0 < A \leq \frac{\mathrm{e}}{q+1}$.

c) Conclure (on pourra supposer $q \geq 2$).

Exercice 10 – Inégalité de Taylor-Lagrange pour sinus

a) Montrer que pour tout réel x : $\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{|x|^5}{120}$.

b) En déduire une valeur approchée de $\sin 0{,}5$ et la précision garantie ; comparer à $\sin 0{,}5 \approx 0{,}4794255$.

c) Sur quel intervalle $[-a,a]$ l'approximation $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ est-elle garantie à 10^{-4} près ?

Exercice 11 – Développer ln 2 par une intégrale

a) Montrer que pour $t \neq -1$: $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k + \frac{(-t)^n}{1+t}$.

b) En intégrant sur $[0,1]$, montrer que $\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire $\ln 2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Vérifier pour $n=10$ ($S_{10} \approx 0{,}6456$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – La série de Leibniz pour π

a) Comme dans l'exercice précédent, montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Majorer le reste.

c) Combien de termes faut-il pour obtenir π à 10^{-3} près par cette méthode ? Commenter.

Exercice 13 – Intégrale d'une fonction périodique

Soit f continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\varphi(a) = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de a (dériver φ).

b) Calculer $\int_0^{n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

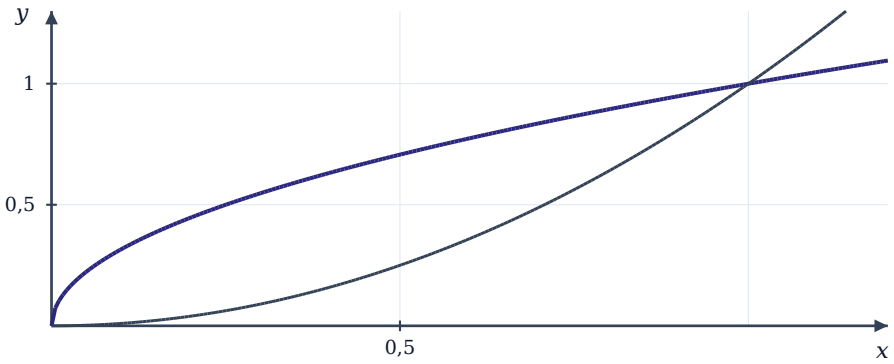
c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t$ (encadrer x entre deux multiples de π).

Exercice 14 – Aires entre deux courbes

a) Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$ pour $x \in [0, 1]$.

b) Calculer l'aire du domaine compris entre $y = \sin x$ et $y = \cos x$ entre deux points d'intersection consécutifs, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

c) Justifier dans chaque cas quelle courbe est au-dessus.



Les courbes $y = \sqrt{x}$ (épaisse) et $y = x^2$

Exercice 15 – Synthèse : l'inégalité d'Hermite-Hadamard

Soit f convexe et continue sur $[a, b]$ ($a < b$), dérivable en $m = \frac{a+b}{2}$.

a) En utilisant la tangente en m, montrer que $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

b) En utilisant la corde entre a et b, montrer que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

c) Application à $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, 2]$: encadrer $\ln 2$.

d) Même méthode sur $[1, \frac{3}{2}]$ et $[\frac{3}{2}, 2]$: obtenir un encadrement plus fin de $\ln 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).