Plaquette 1 – Primitives usuelles, intégration par parties et changement de variable

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On reconnaît une **forme** $u'f(u)$, on intègre **par parties** pour faire disparaître un logarithme ou un polynôme, on **change de variable** pour se ramener à une primitive connue, et on utilise les inégalités intégrales pour majorer.

Exercice 1 – Primitives immédiates

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

b) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

c) $h(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$

Exercice 2 – Intégration par parties (logarithme)

Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 – Double intégration par parties

Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 – Changement de variable affine

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^3}$.

Exercice 5 – Changement de variable trigonométrique

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 – Fraction rationnelle

Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

Exercice 7 – Intégrale et parité

Calculer sans primitive :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\mathrm{e}^{\cos x}\,\mathrm{d}x$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Inégalité intégrale

Montrer que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq 1$, puis donner la valeur exacte.

Exercice 9 – Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = \sin x$ sur $[0\,;\pi]$.

Exercice 10 – Somme de Riemann

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

Exercice 11 – Fonction définie par une intégrale

Soit $F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner F'.

b) Étudier la parité et la monotonie de F.

Exercice 12 – Trinôme sans racine au dénominateur

Calculer $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$.

Exercice 13 – Intégration par parties (arctangente)

Calculer $K = \int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x$, puis en déduire une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 – Changement de variable exponentiel

Calculer $L = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$ en posant $t = \mathrm{e}^x$.

Exercice 15 – Synthèse : intégrale de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x$ pour $n \geq 0$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer par IPP que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

c) En déduire I_4.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).