Plaquette 5 – Sommes de Riemann, calcul approché et applications

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour une **limite de somme** : factoriser par $\frac{1}{n}$ pour faire apparaître $\frac{1}{n}\sum f\left(\frac{k}{n}\right)$, identifier f **continue** sur $[0,1]$, conclure par le théorème des sommes de Riemann ; pour un **produit**, passer au logarithme. Pour un **calcul approché**, choisir la méthode (rectangles en $\frac{1}{n}$, trapèzes en $\frac{1}{n^2}$) et **majorer l'erreur** par l'inégalité des accroissements finis ou de Taylor. En **physique** ou en **probabilités**, une grandeur cumulée (travail, aire, volume, moyenne) est l'intégrale de sa densité.

Exercice 1 – Reconnaître une somme de Riemann

Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$

b) $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2+k^2}$

c) $w_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

Vérifier numériquement pour $n = 100$: $u_{100} \approx 0{,}7829$, $v_{100} \approx 0{,}3491$, $w_{100} \approx 0{,}7299$.

Exercice 2 – Limite d'un produit

Soit $P_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$.

a) Exprimer $\ln P_n$ comme une somme de Riemann.

b) Calculer $\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ par parties.

c) En déduire $\lim P_n$. Vérifier avec $P_{100} \approx 1{,}4766$.

d) En déduire la limite de $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$.

Exercice 3 – Factorielle et somme de Riemann

a) Montrer que $\ln \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\dfrac{k}{n}$.

b) La fonction ln n'est pas continue sur $[0,1]$: le théorème ne s'applique pas directement. En comparant, pour $2 \le k \le n$, le nombre $\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}$ aux intégrales de ln sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ et sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, montrer que

$$\int_{1/n}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k}{n} \le \int_{2/n}^{1+1/n} \ln x\,\mathrm{d}x$$

c) En déduire $\lim \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Méthode des rectangles

Soit f de classe C^1 sur $[a,b]$, $M_1 = \sup|f'|$, $h = \frac{b-a}{n}$ et $R_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)$.

a) Montrer que $\left|\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(t)\,\mathrm{d}t - hf(a+kh)\right| \leq \frac{M_1 h^2}{2}$.

b) En déduire $\left|\int_a^b f - R_n\right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$.

c) Application : $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ avec $n = 10$. Calculer R_{10} (somme géométrique), l'erreur réelle et la borne.

Exercice 5 – Méthode des trapèzes à la main

On admet que la méthode des trapèzes vérifie $\left|\int_a^b f - T_n\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup|f''|$.

a) Calculer T_4 pour $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 2$ (valeurs exactes en fractions, puis décimales).

b) Comparer à $\ln 2 \approx 0{,}693147$ et à la borne d'erreur.

c) Combien de trapèzes garantissent $\ln 2$ à 10^{-6} près ?

d) L'approximation est-elle par excès ou par défaut ? Pourquoi ?

Exercice 6 – Programmer les trapèzes

On veut approcher $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier cette égalité.

b) Écrire une fonction Python *trapezes(f, a, b, n)* et l'utiliser pour $n = 10$, 100, 1000.

c) Comment l'erreur évolue-t-elle quand n est multiplié par 10 ? Est-ce conforme à la théorie ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

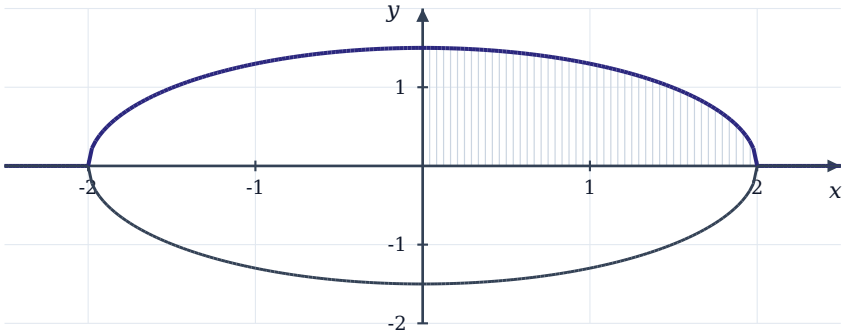
Exercice 7 – Aire d'une ellipse

Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$.

a) Exprimer l'aire du quart d'ellipse situé dans le quadrant $x, y \geq 0$ comme une intégrale.

b) Par le changement de variable $x = a \sin t$, calculer l'aire totale.

c) Application : une piscine elliptique de 10 m sur 6 m (axes). Quelle surface de bâche faut-il ?



Ellipse $a = 2$, $b = 1{,}5$; le quart hachuré

Exercice 8 – Volumes par tranches

Le volume d'un solide dont la section par le plan d'abscisse x a pour aire $S(x)$, pour $x \in [a, b]$, vaut $V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ (principe de Cavalieri, admis).

a) Retrouver le volume d'une boule de rayon R (sections : disques de rayon $\sqrt{R^2 - x^2}$).

b) Retrouver le volume d'un cône de hauteur h et de base de rayon R.

c) Un bol a la forme d'une demi-boule de rayon 10 cm. On le remplit jusqu'à la hauteur 5 cm depuis le fond. Quel volume d'eau contient-il ?

Exercice 9 – Valeur moyenne et valeur efficace

Un courant alternatif est $i(t) = I_m \sin(\omega t)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

a) Calculer sa valeur moyenne sur une période, puis celle de $|i|$.

b) Calculer sa valeur efficace $I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,\mathrm{d}t}$.

c) Même question pour un signal triangulaire qui vaut $i(t) = \frac{4I_m}{T}t$ sur $\left[0, \frac{T}{4}\right]$, prolongé par symétries (on admet que I_{eff} se calcule sur ce quart de période).

d) Application : le secteur délivre 230 V efficaces. Quelle est la tension maximale ?

Exercice 10 – Travail d'une force variable

Le travail d'une force $F(x)$ (colinéaire au déplacement) entre $x = a$ et $x = b$ est $W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Un ressort de raideur k exerce $F(x) = -kx$. Calculer le travail à fournir pour l'étirer de 0 à x_0. Application : $k = 200$ N/m, $x_0 = 5$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) La force de gravitation terrestre sur une masse m à la distance r du centre est $F(r) = \frac{GMm}{r^2}$, avec $GM = gR^2$. Calculer le travail pour monter la masse de $r = R$ à $r = R + h$.

c) Application : satellite de 1000 kg, $R = 6370$ km, $h = 400$ km, $g = 9{,}81$ m/s². Comparer à l'approximation mgh.

Exercice 11 – Une densité de probabilité

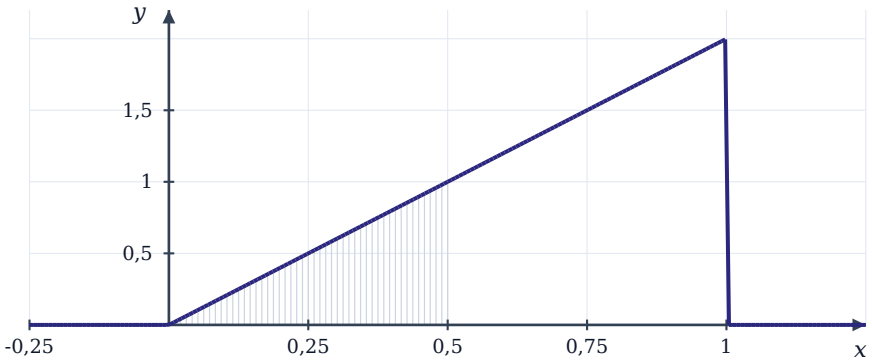
Une variable aléatoire X a pour densité $f(x) = 2x$ sur $[0, 1]$ et 0 ailleurs : $P(c \le X \le d) = \int_c^d f$.

a) Vérifier que f est une densité ($f \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}} f = 1$).

b) Calculer $P\left(X \le \frac{1}{2}\right)$ et $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{4}\right)$.

c) Calculer l'espérance $E(X) = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x$ et la variance $E(X^2) - E(X)^2$.

d) Déterminer la médiane m ($P(X \le m) = \frac{1}{2}$).



La densité f(x) = 2x ; aire hachurée : P(X ≤ 1/2)

Exercice 12 – Longueur d'une chaînette

Un câble suspendu entre deux poteaux prend la forme d'une **chaînette** $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$.

a) Calculer la longueur de la courbe $y = \mathrm{ch}\,x$ pour $x \in [-1, 1]$ (utiliser $1 + \mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2$).

b) Plus généralement, montrer que la longueur de $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ sur $[-L, L]$ est $2a\,\mathrm{sh}\frac{L}{a}$.

c) Poteaux distants de 100 m, $a = 80$ m : quelle longueur de câble faut-il ? Quelle est la flèche (différence de hauteur entre les points d'attache et le point le plus bas) ?

Exercice 13 – Somme de Riemann et suite récurrente

Soit $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \cdot \frac{k}{n}$.

a) Écrire S_n comme une somme de Riemann et retrouver sa limite $\ln 2$.

b) Même question pour T_n.

c) Généraliser : pour $p \in \mathbb{N}^*$, limite de $\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Aire sous une hyperbole et logarithme

a) Calculer, pour $0 < a < b$, l'aire $A(a, b)$ sous l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ entre a et b.

b) Montrer que $A(ka, kb) = A(a, b)$ pour tout $k > 0$: interpréter géométriquement (dilatation de rapport k en abscisse, $\frac{1}{k}$ en ordonnée).

c) Au XVII^{e} siècle, Grégoire de Saint-Vincent a observé que si $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = q a_n$ ($q > 1$), les aires entre deux a_n consécutifs sont égales. Relier au logarithme.

d) Encadrer $A(1, 2) = \ln 2$ à l'aide de deux rectangles, puis de 4.

Exercice 15 – Synthèse : vers la formule de Stirling

Soit $u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n$.

a) Montrer que $u_n - u_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$.

b) On admet que, pour $t = \frac{1}{2n+1}$, $\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t}$ et que $0 \le \frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t} - 1 \le \frac{t^2}{3(1-t^2)}$. En déduire $0 \le u_n - u_{n+1} \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

c) En déduire que (u_n) converge vers un réel λ, puis que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ avec $C = \mathrm{e}^{\lambda}$.

d) On admet (grâce aux intégrales de Wallis) que $C = \sqrt{2\pi}$. Vérifier pour $n = 10$: $10! = 3\,628\,800$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).