Plaquette 2 – Techniques de calcul de primitives

Primitives et intégrales — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Devant une primitive, on essaie dans l'ordre : (1) **reconnaître** une forme $u'f(u)$; (2) **linéariser** un polynôme trigonométrique, ou poser $t = \sin x$ / $t = \cos x$ quand une puissance est impaire ; (3) **passer par les complexes** pour $\mathrm{e}^{ax}\cos bx$; (4) **décomposer en éléments simples** une fraction rationnelle, avec la **forme canonique** pour un trinôme sans racine ; (5) **changer de variable** ($t = \tan\frac{x}{2}$, $u = \sqrt{ax+b}$, $x = \sin t$, $x = \operatorname{sh} t$) ; (6) **intégrer par parties**, éventuellement deux fois pour retomber sur l'intégrale de départ.

Exercice 1 – Reconnaître la forme

Calculer, en reconnaissant une forme usuelle :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^4 x \,\mathrm{d}x$

Exercice 2 – Linéariser un produit

Calculer $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ de deux façons :

a) en écrivant $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ puis en linéarisant $\sin^2 2x$;

b) avec les formules d'Euler, en développant $\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^2$.

c) Interpréter : quelle est la valeur moyenne de $\sin^2 x \cos^2 x$ sur une période ?

Exercice 3 – Puissance impaire : changer de variable

a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \,\mathrm{d}x$ en écrivant $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x$ en posant $t = \sin x$.

c) Pourquoi cette méthode échoue-t-elle pour $\sin^2 x \cos^2 x$?

Exercice 4 – Exponentielle fois cosinus

a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$ en passant par $\mathrm{e}^{(1+i)x}$.

b) En déduire, sans calcul supplémentaire, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x$.

c) Retrouver le résultat de a) par deux intégrations par parties.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Pôle double

a) Déterminer a, b, c tels que $\dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+1}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}$.

c) Contrôler l'ordre de grandeur par un encadrement de l'intégrande.

Exercice 6 – Décomposer 1/(x³ + 1)

a) Factoriser $x^3 + 1$ et décomposer $\dfrac{1}{x^3+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

b) Écrire $\dfrac{-x+2}{x^2-x+1}$ sous la forme $\alpha\dfrac{2x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{\beta}{x^2-x+1}$.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 7 – Changement de variable t = tan(x/2)

a) Justifier les formules $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ pour $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \in \,]-\pi, \pi[$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

c) En déduire la valeur moyenne de $\dfrac{1}{2+\cos x}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 8 – Éliminer une racine carrée

a) Calculer $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ en posant $u = \sqrt{1+x}$.

b) Retrouver le résultat en écrivant $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

c) Calculer de même $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

Exercice 9 – Changement de variable hyperbolique

a) Montrer que $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, et calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \operatorname{sh} t$ (on utilisera $\operatorname{ch}^2 t = \dfrac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}$).

c) Interprétation : c'est la longueur de l'arc de parabole $y = \frac{x^2}{2}$ pour $x \in [0, 1]$. Pourquoi ?

Exercice 10 – Reconnaître un arcsinus

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ (factoriser 4 sous la racine).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Mettre $2x - x^2$ sous forme canonique et calculer $\int_{1/2}^{3/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x - x^2}}$.

c) Donner une primitive de $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ sur $]-a, a[$ $(a > 0)$.

Exercice 11 – Deux intégrations par parties qui bouclent

Soit $I = \int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_1^{\mathrm{e}} \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

a) Par parties, exprimer I en fonction de J, puis J en fonction de I.

b) En déduire I et J.

c) Retrouver I par le changement de variable $t = \ln x$.

Exercice 12 – Formule de réduction

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer I_0 et montrer que $I_n = \mathrm{e} - nI_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

b) En déduire I_1, I_2, I_3.

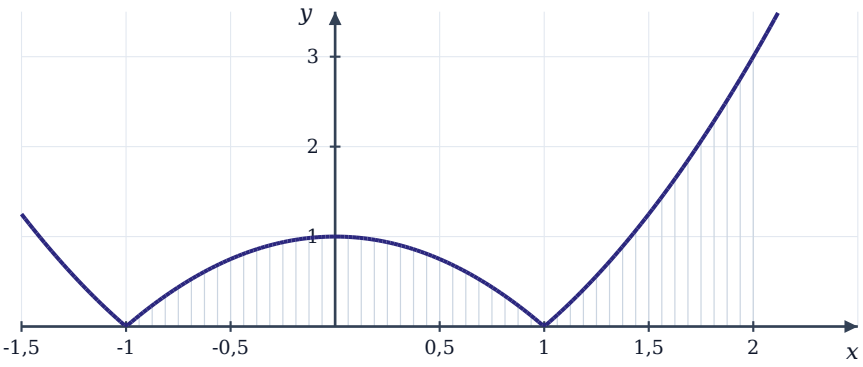
c) Montrer que $0 \leq I_n \leq \mathrm{e} - 1$ et en déduire $nI_{n-1} \to \mathrm{e}$, puis $I_n \sim \frac{\mathrm{e}}{n}$.

Exercice 13 – Valeur absolue et partie entière

a) Calculer $\int_{-1}^{2} |x^2 - 1|\,\mathrm{d}x$ en découpant l'intervalle.

b) Calculer $\int_0^3 x\lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^n \lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x$.



L'aire sous $|x^2 - 1|$ entre -1 et 2

Exercice 14 – Primitive de 1/cos

a) Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ en écrivant $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$ et en posant $t = \sin x$.

b) Montrer que le résultat vaut $\ln(1 + \sqrt{2})$.

c) Vérifier que $x \mapsto \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ est une primitive de $\frac{1}{\cos x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : astuces de symétrie

a) Soit $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I = J$ (poser $x = \frac{\pi}{2} - u$) et calculer $I + J$. En déduire I.

b) Soit $K = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{1 + \tan x}$.

c) En déduire $K = \frac{\pi}{8}\ln 2$ par le changement $x = \frac{\pi}{4} - u$.

d) Aucune de ces intégrales ne se calcule facilement par primitive : quel principe commun a-t-on utilisé ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).