Plaquette 1 – Équiprobabilité, conditionnement, Bayes et indépendance

Probabilités finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espace probabilisé fini. $(\Omega, \mathbb{P})$ avec Ω fini, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}$ additive sur les événements incompatibles.

— **Équiprobabilité** : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ — « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles ».

— **Complémentaire** : $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

— **Crible** : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Conditionnement.

— $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ pour $\mathbb{P}(A) > 0$.

— **Formule des probabilités composées** :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

— **Probabilités totales** : si (A_i) est un **système complet** d'événements,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B \mid A_i)$$

— **Formule de Bayes** :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Indépendance.

— A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, ce qui équivaut (si $\mathbb{P}(A) > 0$) à $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

— **Indépendance mutuelle** de n événements : la relation produit doit valoir pour **toute sous-famille** — l'indépendance deux à deux ne suffit pas.

— **Ne pas confondre** : deux événements **incompatibles** de probabilités non nulles ne sont **jamais** indépendants.

Correction de l'exercice 1 – Équiprobabilité

Univers : les couples ordonnés, $|\Omega| = 36$, tous équiprobables.

— **Somme** $= 7$: les couples sont $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, soit 6 cas.

$$\mathbb{P}(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

— **Somme** $= 2$: un seul cas, $(1,1)$, donc $\mathbb{P}(S = 2) = \dfrac{1}{36} \approx 0{,}028$.

— **Remarque** : 7 est la somme **la plus probable** — c'est la seule atteignable de 6 façons.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Piège classique** : prendre pour univers les 21 paires non ordonnées. Elles ne sont **pas équiprobables** ($\{1,2\}$ est deux fois plus probable que $\{1,1\}$), la formule des cas favorables serait alors fausse.

Réponse. $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{36}$.

Correction de l'exercice 2 – Probabilité conditionnelle

a) **Probabilités composées** :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$$

b) C'est le second facteur : après un tirage rouge, il reste 4 rouges sur 7 boules.

— $\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{7} \approx 0{,}571$.

— **Contrôle par dénombrement** : $\dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$ ✓

— **Comparaison** : $\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{7} < \mathbb{P}(R_1) = \frac{5}{8}$ — le tirage sans remise crée une **dépendance négative**.

Réponse. a) $\frac{5}{14}$ · b) $\frac{4}{7}$.

Correction de l'exercice 3 – Probabilités totales

(A, B) forme un **système complet d'événements**.

— **Formule des probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D \mid A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D \mid B)$$

— $\mathbb{P}(D) = 0{,}60 \times 0{,}02 + 0{,}40 \times 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$.

— **Conclusion** : 3,2 % des pièces sont défectueuses.

— **Contrôle de vraisemblance** : le résultat doit être compris entre 2 % et 5 % — c'est une moyenne pondérée des deux taux ✓

— **Lecture** : bien que B produise moins, elle fournit la majorité des pièces défectueuses (0,020 contre 0,012).

Réponse. $\mathbb{P}(D) = 0{,}032$, soit 3,2 %.

Correction de l'exercice 4 – Formule de Bayes

Bayes :

$$\mathbb{P}(B \mid D) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D \mid B)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0{,}40 \times 0{,}05}{0{,}032} = \frac{0{,}020}{0{,}032} = 0{,}625$$

— **Conclusion** : 62,5 % des pièces défectueuses proviennent de B.

— **Contrôle** : $\mathbb{P}(A \mid D) = \dfrac{0{,}012}{0{,}032} = 0{,}375$, et $0{,}625 + 0{,}375 = 1$ ✓

— **Renversement du conditionnement** : on connaissait $\mathbb{P}(D \mid B) = 5$ % ; on obtient $\mathbb{P}(B \mid D) = 62{,}5$ %. Confondre ces deux nombres est **l'erreur type** en probabilités conditionnelles.

Réponse. $\mathbb{P}(B \mid D) = 0{,}625$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Test de dépistage

Notons M « être malade » et T « test positif ».

— **Données** : $\mathbb{P}(M) = 0{,}01$, $\mathbb{P}(T \mid M) = 0{,}99$, $\mathbb{P}\left(T \mid \overline{M}\right) = 0{,}02$.

— **Probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(T) = 0{,}01 \times 0{,}99 + 0{,}99 \times 0{,}02 = 0{,}0099 + 0{,}0198 = 0{,}0297$$

— **Bayes** :

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{0{,}0099}{0{,}0297} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

— **Conclusion** : seulement **33 %** des personnes positives sont réellement malades.

— **Pourquoi ce résultat contre-intuitif ?** La maladie est rare : les 99 % de gens sains génèrent 1,98 % de faux positifs, soit **deux fois plus** que les 0,99 % de vrais positifs.

— **Leçon de santé publique** : un test très performant reste peu concluant sur une maladie rare — d’où les tests de confirmation.

Réponse. $\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{1}{3} \approx 33$ %.

Correction de l’exercice 6 – Indépendance

— $A = \{2, 4, 6\}$, donc $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

— $B = \{1, 2, 3\}$, donc $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$.

— $A \cap B = \{2\}$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

— **Test** : $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6}$.

— **Conclusion** : les événements ne sont **pas indépendants**.

— **Vérification par le conditionnement** : $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)$ — savoir que le résultat est petit **diminue** la chance qu’il soit pair.

— **Attention** : l’indépendance est une propriété **numérique**, pas une intuition. Ici, deux événements sans lien apparent ne sont pas indépendants.

Réponse. Non : $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$.

Correction de l’exercice 7 – Indépendance deux à deux

Univers : $\{PP, PF, FP, FF\}$, équiprobable.

a) - $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.

— $A \cap B = \{PP\}$, donc $\mathbb{P} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ✓

— $A \cap C = \{PP\}$, donc $\frac{1}{4}$ ✓ ; $B \cap C = \{PP\}$, donc $\frac{1}{4}$ ✓

— Les trois événements sont donc **indépendants deux à deux**.

b) $A \cap B \cap C = \{PP\}$, de probabilité $\frac{1}{4}$.

— Or $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$.

— $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$: les événements ne sont **pas mutuellement indépendants**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Explication** : C est entièrement déterminé par A et B — connaître les deux premiers ôte tout hasard au troisième.
— **Retenir** : l'indépendance deux à deux **n'implique pas** l'indépendance mutuelle. C'est le contre-exemple de référence.

Réponse. a) oui · b) non : $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 8 – Répétitions indépendantes

a) Chaque suite comportant 2 piles et 3 faces a pour probabilité $0{,}3^2 \times 0{,}7^3$.

— Le nombre de telles suites est $\binom{5}{2} = 10$.

$$\mathbb{P} = 10 \times 0{,}09 \times 0{,}343 = 0{,}3087$$

b) **Complémentaire** : « aucun pile » signifie 5 faces.

— $\mathbb{P}(\text{aucun}) = 0{,}7^5 = 0{,}16807$.
— $\mathbb{P}(\text{au moins un}) = 1 - 0{,}16807 = 0{,}83193$.
— **Contrôle** : environ 83 % — cohérent, car avec 5 essais à 30 % il serait surprenant de n'en réussir aucun.
— **Loi sous-jacente** : c'est la **loi binomiale** $B(5\,;0{,}3)$.

Réponse. a) 0,3087 · b) 0,832.

Correction de l'exercice 9 – Problème des anniversaires

Complémentaire : on calcule la probabilité que **tous** les anniversaires soient distincts.

— Nombre de répartitions possibles : 365^{23}.
— Nombre de répartitions à dates distinctes : $A_{365}^{23} = 365 \times 364 \times \ldots \times 343$.

$$\mathbb{P}(\text{tous distincts}) = \frac{365 \times 364 \times \ldots \times 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$$

— **Probabilité cherchée** : $1 - 0{,}4927 \approx 0{,}5073$.
— **Conclusion** : à partir de **23 personnes**, il y a plus d'une chance sur deux qu'une coïncidence existe.
— **Pourquoi si peu ?** Le nombre de **paires** à comparer est $\binom{23}{2} = 253$, et non 23 — c'est ce qui rend le résultat contre-intuitif.

Réponse. Environ 0,507, soit un peu plus d'une chance sur deux.

Correction de l'exercice 10 – Système complet et conditionnement

a) **Probabilités totales** avec $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}(\text{Bl}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

b) **Bayes** :

$$\mathbb{P}(A \mid \text{Bl}) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{3/10}{4/10} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

— **Contrôle** : $\mathbb{P}(B \mid \text{Bl}) = \frac{1/10}{4/10} = \frac{1}{4}$, et la somme vaut 1 ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Lecture** : la boule blanche est un **indice fort** en faveur de l'urne A, qui en contient trois fois plus.

— **Piège** : $\mathbb{P}(\text{Bl})$ n'est **pas** $\frac{4}{10}$ parce qu'il y aurait 4 blanches sur 10 boules — ce serait une coïncidence numérique due à l'égalité des effectifs des deux urnes.

Réponse. a) 0,4 · b) 0,75.

Correction de l'exercice 11 – Tirages successifs

Modèle hypergéométrique : on compte les tirages non ordonnés.

— Nombre total de tirages : $\binom{10}{3} = 120$.

— Tirages favorables : 2 rouges parmi 4 **et** 1 noire parmi 6 :

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{1} = 6 \times 6 = 36$$

— **Probabilité** : $\frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

— **Contrôle par les probabilités composées** : une séquence RRN a pour probabilité $\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{72}{720} = 0{,}1$, et il y a 3 ordres possibles (RRN, RNR, NRR), d'où 0,3 ✓

— **Comparaison avec le tirage avec remise** (binomiale) : $\binom{3}{2}(0{,}4)^2(0{,}6) = 0{,}288$ — proche mais différent.

Réponse. $\frac{3}{10} = 0{,}3$.

Correction de l'exercice 12 – Le problème de Monty Hall

a) Si la voiture est derrière la porte 1, le présentateur choisit au hasard entre 2 et 3 : $P(O_3 \mid V_1) = \frac{1}{2}$. Si elle est derrière la 2, il est obligé d'ouvrir la 3 : $P(O_3 \mid V_2) = 1$. Si elle est derrière la 3, il ne l'ouvre jamais : $P(O_3 \mid V_3) = 0$.

b) Formule des probabilités totales avec le système complet (V_1, V_2, V_3), $P(V_i) = \frac{1}{3}$:

$$P(O_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{2}$$

— Bayes : $P(V_2 \mid O_3) = \frac{P(O_3 \mid V_2)P(V_2)}{P(O_3)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$ et $P(V_1 \mid O_3) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

c) Changer double les chances ($\frac{2}{3}$ contre $\frac{1}{3}$). Intuition : le premier choix est bon avec probabilité $\frac{1}{3}$, et l'ouverture d'une porte par le présentateur (qui sait) n'apporte aucune information sur la porte 1 ; toute la probabilité $\frac{2}{3}$ des deux autres portes se reporte sur celle qui reste fermée.

Réponse. $P(V_2 \mid O_3) = \frac{2}{3}$, $P(V_1 \mid O_3) = \frac{1}{3}$: il faut changer de porte.

Correction de l'exercice 13 – Indépendance et complémentaires

a) A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$, donc

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$$

— En appliquant ce résultat à $(\overline{B}, A)$, on obtient l'indépendance de $\overline{B}$ et $\overline{A}$.

b) $P(A \cap A) = P(A) = P(A)^2 \Leftrightarrow P(A)(1 - P(A)) = 0$.

c) Si $A \cap B = \varnothing$, l'indépendance impose $P(A)P(B) = 0$: c'est possible seulement si l'un est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

de probabilité nulle. Sinon, incompatibles et indépendants s'excluent (savoir que A est réalisé empêche B).

d) Univers de 36 couples équiprobables. $P(A) = \frac{1}{2}$. B : les deux dés de même parité, $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. $A \cap B$: les deux dés pairs, $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$: indépendants.

Réponse. A, $\overline{B}$ indépendants ; A indépendant de lui-même ssi $P(A) \in \{0, 1\}$; incompatibles et indépendants seulement si une probabilité est nulle ; d) indépendants.

Correction de l'exercice 14 – Crible probabiliste à trois événements

a) 60 est multiple de 30 : $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = P(\text{multiple de 6}) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{10}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{15}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{30}$.

b) Chaque probabilité d'intersection est le produit des probabilités ($\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, etc., et $\frac{1}{30} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$) : les trois événements sont **mutuellement indépendants**.

c) Crible :

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1}{30} = \frac{22}{30}$$

— Premier avec 30 : $1 - \frac{22}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$. Par indépendance : $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$.

Réponse. Indépendance mutuelle ; $P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{15}$; premier avec 30 : $\frac{4}{15}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : jeu en plusieurs manches

a) Le match s'arrête en 2 manches si le **même joueur** gagne les deux.

— $\mathbb{P} = 0{,}6^2 + 0{,}4^2 = 0{,}36 + 0{,}16 = 0{,}52$.

— Sinon (probabilité 0,48) il faut une troisième manche décisive.

b) **Décomposition selon la durée du match.**

— **En 2 manches** : A gagne les deux, 0,36.

— **En 3 manches** : A perd une des deux premières puis gagne la troisième. Deux scénarios (AB puis A, ou BA puis A), chacun de probabilité $0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}144$.

— **Total** : $0{,}36 + 2 \times 0{,}144 = 0{,}36 + 0{,}288 = 0{,}648$.

— **Contrôle** : par symétrie, B gagne avec probabilité $0{,}16 + 2 \times 0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}16 + 0{,}192 = 0{,}352$, et $0{,}648 + 0{,}352 = 1$ ✓

— **Interprétation** : le format « au meilleur des 3 » **amplifie** l'avantage du meilleur joueur (60 % → 64,8 %) — c'est la raison d'être des matchs en plusieurs manches.

Réponse. a) 0,52 · b) 0,648.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).