Plaquette 2 – Espaces probabilisés finis : modéliser et calculer

Probabilités finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

— Une probabilité sur $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est déterminée par des $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \geq 0$ de somme 1, et $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

— $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

— $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

— **Inégalité de Boole** :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

— **Tirages** de k boules dans une urne de N boules dont R rouges : sans remise, $\mathbb{P}(\text{exactement } j \text{ rouges}) = \dfrac{\binom{R}{j}\binom{N-R}{k-j}}{\binom{N}{k}}$; avec remise, $\binom{k}{j}\left(\frac{R}{N}\right)^j\left(1-\frac{R}{N}\right)^{k-j}$.

Correction de l’exercice 1 – Un dé truqué

a) $\mathbb{P}(\{k\}) = ck$ avec $\sum_{k=1}^{6} ck = 21c = 1$:

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{k}{21}$$

b) Pair : $\frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$. Premier (2, 3, 5) : $\frac{2+3+5}{21} = \frac{10}{21}$.

c) Par indépendance, $\mathbb{P}(\text{deux fois } k) = \left(\frac{k}{21}\right)^2$, et en sommant sur k (cas disjoints) :

— $\sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{441} = \frac{91}{441} = \frac{13}{63} \approx 0{,}206$, plus que $\frac{1}{6}$ pour un dé équilibré (un dé déséquilibré produit plus souvent des doublons).

Réponse. $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{k}{21}$; pair : $\frac{4}{7}$, premier : $\frac{10}{21}$; doublon : $\frac{13}{63}$.

Correction de l’exercice 2 – Encadrer une intersection

a) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donnent la majoration. Et $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$ s’écrit

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1$$

— d’où la minoration (avec 0).

b) $0{,}3 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 0{,}6$, et $\mathbb{P}(A \cup B) = 1{,}3 - \mathbb{P}(A \cap B) \in [0{,}7\ ;\ 1]$.

c) $A = [\![1, 7]\!]$, $B = [\![5, 10]\!]$: $A \cap B = \{5, 6, 7\}$, probabilité 0,3. $A = [\![1, 7]\!]$, $B = [\![1, 6]\!]$: $B \subset A$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}6$.

d) Incompatibles : non, car $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0{,}3 > 0$. Indépendants : possible, avec $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}42$, qui est dans l’intervalle (par exemple deux lancers indépendants).

Réponse. $0{,}3 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 0{,}6$; $0{,}7 \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$; jamais incompatibles ; indépendants possible (0,42).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Somme de deux dés : choisir l'univers

a) Les sommes ne sont pas équiprobables : 12 ne s'obtient que par $(6,6)$, alors que 7 s'obtient de six façons. Le bon univers est $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ (dés **distingués**), muni de l'équiprobabilité : 36 couples, chacun de probabilité $\frac{1}{36}$.

b) $\mathbb{P}(S=s)$ est le nombre de couples de somme s divisé par 36 :

$$\mathbb{P}(S=s) = \frac{6-|s-7|}{36}, \qquad 2 \le s \le 12$$

— soit $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \dots, \frac{6}{36}$ (pour $s=7$), …, $\frac{1}{36}$.

c) 11 : $(5,6)$ et $(6,5)$, probabilité $\frac{2}{36}$; 12 : $(6,6)$ seul, $\frac{1}{36}$. L'erreur consiste à compter « $\{5,6\}$ » comme une seule issue.

d) Sommes premières $2,3,5,7,11$: $\frac{1+2+4+6+2}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Réponse. Univers $[\![1,6]\!]^2$; $\mathbb{P}(S=s) = \frac{6-|s-7|}{36}$; $\mathbb{P}(11) = 2\mathbb{P}(12)$; premier : $\frac{5}{12}$.

Correction de l'exercice 4 – Les paris du chevalier de Méré

a) Par le complémentaire, avec des lancers indépendants :

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$$

b) $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 1 - 0{,}509 = 0{,}491$.

c) Le premier pari est favorable ($> \frac{1}{2}$), le second défavorable ($< \frac{1}{2}$). Le raisonnement proportionnel est faux, car la probabilité d'« au moins un succès » n'est pas proportionnelle au nombre d'essais (elle vaut $1-(1-p)^n$, pas np).

d) On cherche n tel que $\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$, soit $n > \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} \approx 24{,}6$. Il faut 25 lancers.

Réponse. $\approx 0{,}518$; $\approx 0{,}491$; il faut 25 lancers pour dépasser $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5 – Tirages simultanés et successifs

a) Univers : parties à 3 éléments parmi 8 ($\binom{8}{3} = 56$), équiprobables. Favorables : 2 rouges parmi 5 et 1 noire parmi 3 :

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{10 \times 3}{56} = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$$

b) Univers : listes de 3 boules distinctes, $8 \times 7 \times 6 = 336$. Favorables : on choisit la position de la noire (3), puis on tire les boules dans l'ordre : $3 \times (5 \times 4 \times 3) = 180$. Probabilité $\frac{180}{336} = \frac{15}{28}$: **la même**. Tirer successivement sans remise ou simultanément donne les mêmes probabilités pour les événements qui ne dépendent pas de l'ordre.

c) Avec remise, chaque tirage donne rouge avec probabilité $\frac{5}{8}$, indépendamment :

— $\binom{3}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\frac{3}{8} = \frac{225}{512} \approx 0{,}439$.

d) Si l'urne contient beaucoup de boules, retirer quelques boules ne modifie presque pas la composition : les tirages sans remise sont presque indépendants, et la loi

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

hypergéométrique est proche de la loi binomiale.

Réponse. $\frac{15}{28}$ (simultané ou successif sans remise) ; $\frac{225}{512}$ avec remise.

Correction de l'exercice 6 – Une probabilité non uniforme sur [[1, n]]

a) Les poids sont positifs et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^{n-1}} = 1$$

b) $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^k}$.

c) On lance la pièce jusqu'au premier Pile, en s'arrêtant de toute façon après $n-1$ lancers. L'issue $k \le n-1$ correspond à « $k-1$ Face puis Pile » : probabilité $\frac{1}{2^k}$. L'issue n correspond à « $n-1$ Face » : probabilité $\frac{1}{2^{n-1}}$.

d) $n = 5$: $\mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

Réponse. Somme $= 1$; $\mathbb{P}(\{1, \dots, k\}) = 1 - 2^{-k}$; $\frac{5}{16}$ pour $n = 5$.

Correction de l'exercice 7 – L'inégalité de Boole en pratique

a) Avec A_i : « le composant i tombe en panne » :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{10} \mathbb{P}(A_i) = 10 \times 0{,}01 = 0{,}1$$

b) $1 - 0{,}99^{10} \approx 0{,}0956$. La borne de Boole (0,1) est très proche : les pannes simultanées sont rares.

c) $f(p) = np - 1 + (1-p)^n$ vérifie $f(0) = 0$ et $f'(p) = n - n(1-p)^{n-1} \ge 0$ sur $[0,1]$: $f \ge 0$. (C'est aussi Boole pour des événements indépendants.)

d) Boole garantit $n \times 0{,}01 \le 0{,}05$ pour $n \le 5$. Sans hypothèse de dépendance, on ne peut pas faire mieux : si les pannes sont incompatibles (jamais deux à la fois), la probabilité vaut exactement $n \times 0{,}01$.

Réponse. Boole : $\le 0{,}1$; indépendance : $\approx 0{,}0956$; $1 - (1-p)^n \le np$; au plus 5 composants.

Correction de l'exercice 8 – Au moins un as

a) Mains sans as : 5 cartes parmi les 48 autres :

$$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{1\,712\,304}{2\,598\,960} \approx 0{,}659$$

b) $1 - 0{,}659 = 0{,}341$.

c) Exactement un as : $\frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{4 \times 194\,580}{2\,598\,960} \approx 0{,}299$. Au moins deux :

$0{,}341 - 0{,}299 = 0{,}042$.

d) Sans remise, la probabilité que les 5 cartes successives ne soient pas des as vaut

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\frac{48}{52}\times\frac{47}{51}\times\frac{46}{50}\times\frac{45}{49}\times\frac{44}{48}\approx 0{,}659$ (formule des probabilités composées), et l'on retrouve 0,341.

Réponse. Aucun as : $\approx 0{,}659$; au moins un : $\approx 0{,}341$; exactement un : $\approx 0{,}299$.

Correction de l'exercice 9 – Livres rangés au hasard

a) On colle les trois tomes en un bloc « 123 » : il reste $n-2$ objets à ranger, $(n-2)!$ ordres favorables :

$$\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$$

b) Le bloc peut être dans 3! = 6 ordres : $\frac{6}{n(n-1)}$.

c) L'application qui échange les positions des tomes 1 et 2 est une bijection entre les rangements où 1 est à gauche de 2 et les autres : probabilité $\frac{1}{2}$. De même, les 6 ordres relatifs des trois tomes sont équiprobables (bijections par permutation des trois tomes) : $\frac{1}{6}$.

Réponse. $\frac{1}{n(n-1)}$; $\frac{6}{n(n-1)}$; $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 10 – Une partie tirée au hasard

a) Par la bijection $X\mapsto$ indicatrice, choisir X au hasard revient à tirer n bits indépendants et équilibrés. $\mathbb{P}(1\in X)=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}$; $\mathbb{P}(\mathrm{card}X=k)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

b) Pour des indices $i_1<\ldots<i_r$, les parties contenant $i_1,\ldots,i_r$ sont au nombre de 2^{n-r} :

$$\mathbb{P}(i_1\in X,\ldots,i_r\in X)=\frac{2^{n-r}}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^r=\prod_j\mathbb{P}(i_j\in X)$$

c) Pour chaque élément i, il y a 4 situations équiprobables (i dans X ou non, dans Y ou non), indépendantes d'un élément à l'autre. $X\subset Y$ exclut seulement « $i\in X$ et $i\notin Y$ » : probabilité $\left(\frac{3}{4}\right)^n$. De même, $X\cap Y=\varnothing$ exclut « $i\in X\cap Y$ » : $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Réponse. $\frac{1}{2}$; $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$; indépendance mutuelle ; $\mathbb{P}(X\subset Y)=\mathbb{P}(X\cap Y=\varnothing)=\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Correction de l'exercice 11 – Le plus grand de trois dés

a) $M\le k$ signifie que les trois dés sont $\le k$; par indépendance :

$$\mathbb{P}(M\le k)=\left(\frac{k}{6}\right)^3=\frac{k^3}{216}$$

b) $\{M=k\}=\{M\le k\}\setminus\{M\le k-1\}$: $\mathbb{P}(M=k)=\frac{k^3-(k-1)^3}{216}=\frac{3k^2-3k+1}{216}$. Valeurs : $\frac{1}{216},\frac{7}{216},\frac{19}{216},\frac{37}{216},\frac{61}{216},\frac{91}{216}$.

c) $\mathbb{P}(M=6)=\frac{91}{216}\approx 0{,}421$, soit aussi $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

d) $1+7+19+37+61+91=216$ (somme télescopique des $k^3-(k-1)^3$).

Réponse. $\mathbb{P}(M\le k)=\frac{k^3}{216}$; $\mathbb{P}(M=k)=\frac{3k^2-3k+1}{216}$; $\mathbb{P}(M=6)=\frac{91}{216}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Deux entiers au hasard

a) Univers $[\![1,n]\!]^2$, n^2 couples équiprobables. $a=b$: n couples, $\mathbb{P}=\frac{1}{n}$. L'échange $(a,b)\mapsto(b,a)$ est une bijection entre $\{a<b\}$ et $\{a>b\}$, qui ont donc même probabilité :

$$\mathbb{P}(a<b)=\frac{1-\frac{1}{n}}{2}=\frac{n-1}{2n}$$

b) Pour chaque a, un unique $b=n+1-a\in[\![1,n]\!]$: $\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$.

c) On compte, pour chaque b, ses diviseurs : $d(1)=1$, $d(2)=2$, $d(3)=2$, $d(4)=3$, $d(5)=2$, $d(6)=4$. Total 14 couples : $\mathbb{P}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$.

Réponse. $\mathbb{P}(a=b)=\frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(a<b)=\frac{n-1}{2n}$; $\frac{1}{n}$; $\frac{7}{18}$.

Correction de l'exercice 13 – Trois sommets d'un hexagone

a) $\binom{6}{3}=20$ triangles équiprobables. Équilatéraux : les sommets de rang pair ou ceux de rang impair, soit 2 : probabilité $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

b) L'hexagone a 3 diamètres (sommets opposés). Pour chacun, le troisième sommet est l'un des 4 autres, et le triangle est rectangle (théorème de l'angle inscrit) : $3\times4=12$ triangles, probabilité $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

c) Les triangles restants ($20-2-12=6$) sont formés de trois sommets consécutifs : isocèles (deux côtés égaux à un côté de l'hexagone) et non équilatéraux. Probabilité $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

$$\frac{2}{20}+\frac{12}{20}+\frac{6}{20}=1$$

Réponse. Équilatéral $\frac{1}{10}$; rectangle $\frac{3}{5}$; isocèle non équilatéral $\frac{3}{10}$.

Correction de l'exercice 14 – Tirage d'une boule dans une urne composite

a) Système complet (U_1,U_2,U_3), formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B)=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times0=\frac{1}{2}$$

b) Une urne unique contient 3 blanches sur 6 : $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}$ aussi. L'égalité vient ici de ce que les urnes ont **le même nombre de boules**.

c) Deux étapes : $\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times0=\frac{4}{9}\approx0{,}444$. Urne unique : 2 blanches sur 7 boules, $\frac{2}{7}\approx0{,}286$. Ce n'est plus équivalent : dans le modèle à deux étapes, la boule seule de U_1 « pèse » autant qu'une urne entière.

Réponse. $\frac{1}{2}$ dans les deux cas ; c) $\frac{4}{9}$ contre $\frac{2}{7}$: non équivalent.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une permutation aléatoire

a) $\sigma(1)=1$: les autres valeurs se permutent librement, $(n-1)!$ permutations, probabilité $\frac{1}{n}$. $\sigma(1)<\sigma(2)$: la composition par la transposition $(1\ 2)$ à droite échange les deux situations, bijectivement : probabilité $\frac{1}{2}$.

b) Il y a $(n-1)!$ cycles de longueur n :

$$\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $I_4 = 10$ involutions : $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

d) $\mathbb{P}(\sigma(1)=1, \sigma(2)=2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$, alors que $\mathbb{P}(\sigma(1)=1)\mathbb{P}(\sigma(2)=2) = \frac{1}{n^2}$. Non indépendants (légère corrélation positive : si 1 est fixe, les autres ont un peu plus de chances de l'être).

Réponse. $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{2}$; n-cycle : $\frac{1}{n}$; involution ($n=4$) : $\frac{5}{12}$; non indépendants.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).