Plaquette 4 – Indépendance et épreuves répétées

Probabilités finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Indépendance.

— A, B indépendants : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$; alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

— $A_1, \dots, A_n$ **mutuellement indépendants** : pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$; on peut remplacer certains A_i par leurs complémentaires.

— **Au moins un** : $\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = 1 - \prod (1 - \mathbb{P}(A_i))$ pour des événements mutuellement indépendants.

— **Épreuves répétées** (n essais indépendants, succès de probabilité p) :

$$\mathbb{P}(\text{exactement } k \text{ succès}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

— Premier succès au rang k : $(1-p)^{k-1}p$; aucun succès en n essais : $(1-p)^n$.

— **Fiabilité** : en série, $\prod p_i$; en parallèle, $1 - \prod (1 - p_i)$.

Correction de l’exercice 1 – Indépendance deux à deux mais pas mutuelle

Univers $\{PP, PF, FP, FF\}$ équiprobable ; $A = \{PP, PF\}$, $B = \{PP, FP\}$, $C = \{PP, FF\}$, chacun de probabilité $\frac{1}{2}$.

a) $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{PP\}$, de probabilité $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: indépendance deux à deux.

b) $A \cap B \cap C = \{PP\}$:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

— pas d’indépendance mutuelle.

c) Chaque événement, pris seul, n’apporte aucune information sur un autre ; mais la connaissance simultanée de A et B détermine C (par exemple $\mathbb{P}(C \mid A \cap B) = 1$).

Réponse. Deux à deux indépendants ; $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$: pas mutuellement.

Correction de l’exercice 2 – Fiabilité d’un système

a) Série : tous doivent fonctionner, $0{,}9^3 = 0{,}729$. Parallèle : il suffit qu’un fonctionne ; par le complémentaire,

$$1 - 0{,}1^3 = 0{,}999$$

b) Le bloc parallèle $B \cup C$ fonctionne avec probabilité $1 - 0{,}1^2 = 0{,}99$; en série avec A (indépendant du bloc) : $0{,}9 \times 0{,}99 = 0{,}891$.

c) $1 - 0{,}1^n \geq 0{,}9999 \Leftrightarrow 0{,}1^n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow n \geq 4$. Quatre composants.

Réponse. Série 0,729, parallèle 0,999 ; mixte 0,891 ; 4 composants.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Combien d’essais pour un succès probable ?

a) Aucun succès : $(1-p)^n$. Donc $\mathbb{P}(\text{au moins un succès}) = 1 - 0{,}95^n$.

b) $1 - 0{,}95^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}95^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}95} \approx 89{,}8$ ($\ln 0{,}95 < 0$ renverse l’inégalité) :

$$n = 90$$

c) $1 - 0{,}95^{20} \approx 1 - 0{,}358 = 0{,}642$: avec 20 essais, il y a encore 36 % de chances de n’avoir aucun succès. Le nombre **moyen** de succès vaut 1, mais cela ne garantit pas un succès.

Réponse. $1 - 0{,}95^n$; $n = 90$; 20 essais : $\approx 0{,}642$.

Correction de l’exercice 4 – Temps d’attente du premier succès

a) $T = k$: $k-1$ échecs puis un succès : $(1-p)^{k-1}p$. $T > k$: k échecs : $(1-p)^k$.

b) $\{T > m+n\} \subset \{T > m\}$, donc

$$\mathbb{P}(T > m+n \mid T > m) = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = \mathbb{P}(T > n)$$

— Avoir échoué m fois ne rend pas le succès plus proche : les épreuves n’ont pas de mémoire (contrairement à l’intuition du joueur qui « attend son tour »).

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} = \frac{125}{1296} \approx 0{,}096$; $\mathbb{P}(T > 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}162$.

Réponse. $\mathbb{P}(T = k) = (1-p)^{k-1}p$, $\mathbb{P}(T > k) = (1-p)^k$; absence de mémoire ; $\approx 0{,}096$ et $\approx 0{,}162$.

Correction de l’exercice 5 – Deux ou trois manches gagnantes ?

a) Il gagne si la dernière manche jouée est sa deuxième victoire : $2-0$ (manches gagnées $1, 2$) ou $2-1$ (une défaite parmi les deux premières manches, puis victoire) :

$$p^2 + \binom{2}{1} p^2 q = p^2(1 + 2q)$$

b) $3-0$, $3-1$ (une défaite parmi les 3 premières), $3-2$ (deux défaites parmi les 4 premières) :

— $p^3\left(1 + \binom{3}{1}q + \binom{4}{2}q^2\right) = p^3(1 + 3q + 6q^2)$.

c) $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$: a) $0{,}36 \times 1{,}8 = 0{,}648$; b) $0{,}216 \times (1 + 1{,}2 + 0{,}96) = 0{,}216 \times 3{,}16 \approx 0{,}683$. Le format long favorise le meilleur joueur : plus il y a de manches, moins le hasard d’une manche compte (c’est la loi des grands nombres en germe).

Réponse. $p^2(1+2q)$; $p^3(1+3q+6q^2)$; 0,648 contre 0,683.

Correction de l’exercice 6 – Exactement deux six

a) Une suite donnée avec deux 6 et trois autres résultats a pour probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$ (indépendance). Il y a $\binom{5}{2} = 10$ choix des positions des 6 :

$$\mathbb{P}(\text{exactement deux 6}) = 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216} = \frac{1\,250}{7\,776} \approx 0{,}161$$

b) $\mathbb{P}(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3\,125}{7\,776}$ et $\mathbb{P}(1) = 5 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3\,125}{7\,776}$; donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\mathbb{P}(\geq 2) = 1 - \frac{6\,250}{7\,776} = \frac{1\,526}{7\,776} \approx 0{,}196$.

c) $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) \approx 0{,}402$ sont les plus grandes (le rapport $\frac{\mathbb{P}(k+1)}{\mathbb{P}(k)} = \frac{5-k}{5(k+1)}$ vaut 1 pour $k = 0$ et est < 1 ensuite) : 0 et 1 sont également les plus probables.

Réponse. $\frac{1250}{7776} \approx 0{,}161$; au moins deux : $\approx 0{,}196$; 0 et 1 ex æquo.

Correction de l'exercice 7 – Indépendance conditionnelle n'est pas indépendance

a) E : « pièce équilibrée », T : « pièce truquée ». Probabilités totales :

$$\mathbb{P}(P_1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{3}{4}, \qquad \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{5}{8}$$

b) $\mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = \frac{9}{16} \neq \frac{10}{16}$: **pas indépendants**, bien qu'ils le soient sachant E et sachant T.

c) $\mathbb{P}(P_2 \mid P_1) = \frac{5/8}{3/4} = \frac{5}{6} > \frac{3}{4}$. Un premier Pile rend plus probable que la pièce soit truquée ($\mathbb{P}(T \mid P_1) = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$), ce qui augmente la probabilité d'un second Pile : les lancers communiquent **à travers** l'incertitude sur la pièce.

Réponse. $\mathbb{P}(P_1) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \frac{5}{8} \neq \frac{9}{16}$: dépendants ; $\mathbb{P}(P_2 \mid P_1) = \frac{5}{6}$.

Correction de l'exercice 8 – Parité du nombre de succès

a) Le nombre de succès après $n+1$ épreuves est pair si et seulement s'il était pair et que l'épreuve $n+1$ échoue, ou impair et qu'elle réussit (indépendance de la dernière épreuve) :

$$\pi_{n+1} = (1-p)\pi_n + p(1-\pi_n) = (1-2p)\pi_n + p$$

b) Point fixe $\frac{1}{2}$; $\pi_n - \frac{1}{2} = (1-2p)^n\left(\pi_0 - \frac{1}{2}\right)$ avec $\pi_0 = 1$: $\pi_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n$.

c) En sommant $(q+p)^n = \sum \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ et $(q-p)^n = \sum (-1)^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, les termes impairs s'éliminent et les pairs doublent : on retrouve $\frac{1+(1-2p)^n}{2}$.

d) $p = \frac{1}{2}$: $\pi_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

Réponse. $\pi_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2}$; $\frac{1}{2}$ si $p = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 9 – L'égalité au tennis

a) Chaque cycle de deux points donne : victoire (p^2), défaite (q^2) ou retour à l'égalité ($2pq$). Gagner au cycle $k+1$ exige k retours à l'égalité puis une victoire, par indépendance :

$$e_n = \sum_{k=0}^{n-1} (2pq)^k p^2$$

b) $0 \leq 2pq < 1$ (car $2pq \leq \frac{1}{2}$), donc la somme géométrique converge : $e = \frac{p^2}{1-2pq}$, et $1 - 2pq = (p+q)^2 - 2pq = p^2 + q^2$.

c) $e = \frac{0{,}36}{0{,}36 + 0{,}16} = \frac{9}{13} \approx 0{,}692 > 0{,}6$. Le système amplifie l'avantage du meilleur joueur.

Réponse. $e_n = p^2 \sum_{k<n} (2pq)^k \to \frac{p^2}{p^2+q^2}$; $\frac{9}{13} \approx 0{,}692$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Contrôle qualité : avec ou sans remise

a) Univers : parties à 10 éléments parmi 100, équiprobables :

$$\frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{95\times 94\times\cdots\times 86}{100\times 99\times\cdots\times 91} \approx 0{,}584$$

b) Avec remise, les tirages sont indépendants : $0{,}95^{10} \approx 0{,}599$. Les deux valeurs sont proches (10 est petit devant 100) ; sans remise, chaque pièce saine tirée rend un peu plus probable de tirer ensuite une défectueuse, d'où une probabilité un peu plus faible.

c) Exactement une défectueuse : $\frac{\binom{5}{1}\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} \approx \frac{5{,}87\times 10^{12}}{1{,}73\times 10^{13}} \approx 0{,}339$. Acceptation :

$0{,}584 + 0{,}339 \approx 0{,}92$.

Réponse. Sans remise $\approx 0{,}584$, avec remise $\approx 0{,}599$; acceptation $\approx 0{,}92$.

Correction de l'exercice 11 – Événements liés à des lancers distincts

a) $A = U \times [\![1,6]\!]$, $B = [\![1,6]\!] \times V$, $A \cap B = U \times V$:

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{|U||V|}{36} = \frac{6|U|}{36}\times\frac{6|V|}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

b) $U = \{2,4,6\}$, $V = \{5,6\}$: cas particulier de a).

c) Somme 7 : $\mathbb{P} = \frac{1}{6}$; premier dé 3 : $\frac{1}{6}$; intersection $\{(3,4)\}$: $\frac{1}{36}$. Indépendants (surprenant : la somme ne dépend pas que du second dé). Somme 8 : $\frac{5}{36}$, intersection $\{(3,5)\}$: $\frac{1}{36} \neq \frac{5}{216}$. Dépendants.

Réponse. Indépendance pour des événements portant sur des dés différents ; somme 7 indépendante du premier dé, somme 8 non.

Correction de l'exercice 12 – Pile ou face : le nombre de Piles le plus probable

a) Chacune des 2^n suites est équiprobable ; $\binom{n}{k}$ contiennent k Piles :

$$\mathbb{P}(k \text{ Piles}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

b) Le coefficient binomial est maximal au milieu : $k = \frac{n}{2}$ si n est pair. $n = 10$: $\frac{252}{1\,024} \approx 0{,}246$. $n = 100$: $\frac{1{,}009\times 10^{29}}{1{,}268\times 10^{30}} \approx 0{,}080$.

c) Cette probabilité tend vers 0 (comme $\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$ d'après la formule de Stirling). Pourtant, la **proportion** de Piles se concentre près de $\frac{1}{2}$: ce qui est probable, c'est d'être proche de l'égalité, pas de l'atteindre exactement.

Réponse. $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$; maximum en $\frac{n}{2}$: $\approx 0{,}246$ ($n = 10$), $\approx 0{,}080$ ($n = 100$) ; tend vers 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Indépendance mutuelle et complémentaires

a) Il suffit de vérifier la relation produit pour une famille contenant $\overline{A_1}$, soit $\overline{A_1} \cap B$ avec $B = \bigcap_{i \in I} A_i$ ($I \subset [\![2, n]\!]$). Or

$$\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A_1 \cap B) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_1) \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

b) On applique a) successivement à chaque indice à remplacer (l'ordre des événements ne joue pas).

c) $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$, de probabilité $\prod (1 - \mathbb{P}(A_i))$ par b).

d) $1 - 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}2 = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

Réponse. Complémentaires encore indépendants ; $\mathbb{P}(\bigcup A_i) = 1 - \prod (1 - \mathbb{P}(A_i))$; d) 0,96.

Correction de l'exercice 14 – Le premier qui tire un six

a) A gagne à son k-ième lancer si les $2(k-1)$ lancers précédents (de A et B) ne donnent pas 6, puis si A fait 6 ; par indépendance :

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne au lancer } k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2(k-1)} \frac{1}{6}$$

b) En sommant ($k = 1, 2, 3$, cas disjoints) : $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{25}{36} + \frac{625}{1296}\right) = \frac{2\,821}{7\,776} \approx 0{,}363$.

— B gagne à son k-ième lancer : $\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} \frac{1}{6}$, donc $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{6}\,\mathbb{P}(A) \approx 0{,}302$.

— Pas de vainqueur : 6 échecs, $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}335$.

c) $0{,}363 + 0{,}302 + 0{,}335 = 1$ (aux arrondis près ; exactement, $\frac{16\,926 + 14\,105 + 15\,625}{46\,656} = 1$). Le rapport $\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{6}{5}$: commencer donne un avantage de 20 %, quel que soit le nombre de tours autorisés.

Réponse. $\mathbb{P}(A) = \frac{2821}{7776} \approx 0{,}363$, $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{6}\mathbb{P}(A) \approx 0{,}302$, aucun : $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}335$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : amplifier un algorithme probabiliste

a) La majorité est fausse si au moins 2 exécutions sur 3 se trompent :

$$\binom{3}{2}\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3 = 3 \times \frac{1}{16} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{64} = \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = \frac{10}{64} \approx 0{,}156$$

b) Si la bonne réponse est « oui », on ne se trompe jamais. Si c'est « non », on se trompe seulement si les k exécutions répondent « oui » à tort : $\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

c) $4^{-k} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow k \geq \frac{6 \ln 10}{\ln 4} \approx 9{,}97$: $k = 10$ exécutions.

d) En a), 3 exécutions ne font passer l'erreur que de 0,25 à 0,156 ; en b), elles la font passer à $\frac{1}{64} \approx 0{,}016$. L'erreur unilatérale décroît géométriquement de façon très rapide : c'est le principe des tests de primalité probabilistes (Miller-Rabin).

Réponse. Majorité de 3 : $\frac{10}{64}$; unilatéral : 4^{-k}, 10 exécutions pour 10^{-6}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).