Plaquette 1 – Équiprobabilité, conditionnement, Bayes et indépendance

Probabilités finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On modélise l'univers et la probabilité, on compte en situation d'**équiprobabilité**, on applique les **probabilités totales** et la formule de **Bayes**, et on distingue soigneusement indépendance et incompatibilité.

Exercice 1 – Équiprobabilité

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Calculer la probabilité que la somme vaille 7, puis qu'elle vaille 2.

Exercice 2 – Probabilité conditionnelle

Dans une urne, 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire deux boules **sans remise**.

a) Probabilité que les deux soient rouges ?

b) Probabilité que la seconde soit rouge sachant que la première l'était ?

Exercice 3 – Probabilités totales

Une usine a deux machines : A produit 60 % des pièces avec 2 % de défauts, B produit 40 % avec 5 % de défauts.

Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse ?

Exercice 4 – Formule de Bayes

Avec les données précédentes, une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la machine B ?

Exercice 5 – Test de dépistage

Une maladie touche 1 % de la population. Un test détecte 99 % des malades, mais donne 2 % de faux positifs.

Une personne est testée positive : quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

Exercice 6 – Indépendance

On lance un dé équilibré. Soient A « le résultat est pair » et B « le résultat est ≤ 3 ».

Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 7 – Indépendance deux à deux

On lance deux pièces équilibrées. Soient A « la première est pile », B « la seconde est pile », C « les deux résultats sont identiques ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que A, B, C sont indépendants deux à deux.

b) Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 8 – Répétitions indépendantes

On lance 5 fois une pièce truquée donnant pile avec probabilité 0,3.

a) Probabilité d'obtenir exactement 2 piles ?

b) Probabilité d'obtenir au moins un pile ?

Exercice 9 – Problème des anniversaires

Dans un groupe de 23 personnes, quelle est la probabilité qu'au moins deux partagent le même jour d'anniversaire ? (on suppose 365 jours équiprobables)

Exercice 10 – Système complet et conditionnement

Une urne A contient 3 blanches et 2 noires ; une urne B contient 1 blanche et 4 noires. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule.

a) Probabilité de tirer une blanche ?

b) Sachant qu'elle est blanche, probabilité qu'elle vienne de A ?

Exercice 11 – Tirages successifs

Une urne contient 4 boules rouges et 6 noires. On tire 3 boules **sans remise**. Probabilité d'obtenir exactement 2 rouges ?

Exercice 12 – Le problème de Monty Hall

Un jeu télévisé propose trois portes ; une voiture est derrière l'une d'elles (au hasard), des chèvres derrière les deux autres. Le candidat choisit la porte 1. Le présentateur, qui sait où est la voiture, ouvre alors une porte non choisie cachant une chèvre (s'il a le choix, il tire au hasard entre les deux). Il ouvre la porte 3. Le candidat a-t-il intérêt à changer pour la porte 2 ?

a) On note V_i : « la voiture est derrière la porte i » et O_3 : « le présentateur ouvre la porte 3 ». Calculer $P(O_3 \mid V_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

b) En déduire $P(O_3)$ puis $P(V_2 \mid O_3)$ et $P(V_1 \mid O_3)$.

c) Conclure et expliquer l'intuition.

Exercice 13 – Indépendance et complémentaires

Soient A et B deux événements indépendants.

a) Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants, puis $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

b) Montrer qu'un événement A est indépendant de lui-même si et seulement si $P(A) \in \{0, 1\}$.

c) Deux événements incompatibles peuvent-ils être indépendants ?

d) Application : on lance deux dés ; A : « le premier dé est pair », B : « la somme est paire ». A et B sont-ils indépendants ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Crible probabiliste à trois événements

On tire au hasard un entier dans $[\![1, 60]\!]$. On note A, B, C les événements « divisible par 2 », « par 3 », « par 5 ».

a) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$.

b) Les événements A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ?

c) Calculer $P(A \cup B \cup C)$ par la formule du crible, et en déduire la probabilité que l'entier soit premier avec 30.

Exercice 15 – Synthèse : jeu en plusieurs manches

Deux joueurs A et B s'affrontent. À chaque manche, A gagne avec probabilité 0,6, indépendamment des autres. Le premier à 2 victoires gagne le match.

a) Probabilité que le match dure exactement 2 manches ?

b) Probabilité que A gagne le match ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).