Plaquette 3 – Conditionnement : probabilités composées, totales et formule de Bayes

Probabilités finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Dès qu'une expérience se déroule **en étapes** (choix d'une urne puis d'une boule, cause puis symptôme, état d'aujourd'hui puis de demain), on la représente par un **arbre** : les probabilités portées par les branches sont des probabilités **conditionnelles**, et la probabilité d'un chemin est le produit des branches (probabilités composées). La probabilité d'un événement final s'obtient en sommant sur les chemins qui y mènent (probabilités totales), et la formule de **Bayes** permet de « remonter » l'arbre : connaissant l'effet, quelle est la probabilité de chaque cause ? On se méfie de la confusion entre $\mathbb{P}(A \mid B)$ et $\mathbb{P}(B \mid A)$.

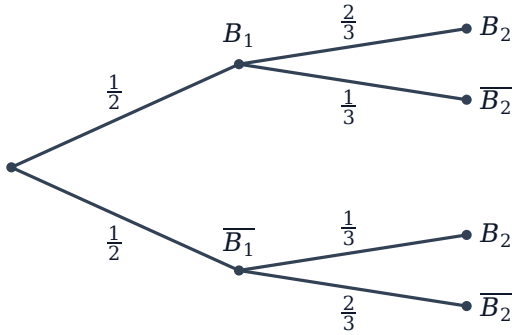
Exercice 1 – L'urne de Pólya

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire une boule, on la remet et l'on ajoute une boule de la même couleur ; puis on tire une deuxième boule.

a) Construire l'arbre et calculer la probabilité que la deuxième boule soit blanche.

b) Sachant que la deuxième boule est blanche, quelle est la probabilité que la première l'ait été ?

c) Quelle est la probabilité que les deux boules soient de la même couleur ?



Premier tirage puis second tirage.

Exercice 2 – Probabilités composées : tirages sans remise

Une urne contient 4 boules rouges et 6 noires. On tire successivement et sans remise trois boules.

a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap N_3)$ par la formule des probabilités composées.

b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux rouges, et comparer avec le dénombrement direct.

c) Montrer que $\mathbb{P}(R_3) = \dfrac{4}{10}$ (la couleur de la troisième boule a la même loi que celle de la première).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Un filtre anti-spam bayésien

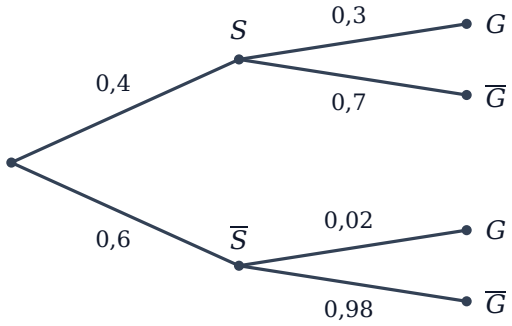
40 % des courriels reçus sont des spams. Le mot « gratuit » apparaît dans 30 % des spams et dans 2 % des courriels légitimes.

a) Quelle est la probabilité qu'un courriel contienne « gratuit » ?

b) Un courriel contient « gratuit ». Quelle est la probabilité que ce soit un spam ?

c) Un courriel ne contient pas « gratuit ». Probabilité que ce soit un spam ?

d) Commenter l'intérêt et les limites d'un tel filtre.



S : spam ; G : contient « gratuit ».

Exercice 4 – Trois machines, une pièce défectueuse

Trois machines A, B, C produisent respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces d'une usine, avec des taux de défauts de 1 %, 2 % et 5 %.

a) Quelle est la proportion de pièces défectueuses ?

b) Une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de chaque machine ?

c) Quelle machine faudrait-il améliorer en priorité ? Quel serait le taux de défauts global si l'on ramenait celui de C à 1 % ?

Exercice 5 – Transmission d'un bit par relais

Un bit est transmis à travers n relais successifs ; chaque relais inverse le bit avec probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment des autres. On note q_n la probabilité que le bit reçu soit correct ($q_0 = 1$).

a) Montrer que $q_{n+1} = (1-p)q_n + p(1-q_n)$.

b) En déduire $q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n$.

c) Calculer q_2 et q_{10} pour $p = 0{,}1$. Que devient q_n quand $n \to +\infty$? Interpréter.

Exercice 6 – Les coffrets de Bertrand

Trois coffrets contiennent chacun deux pièces : le premier deux pièces d'or, le deuxième une d'or et une d'argent, le troisième deux d'argent. On choisit un coffret au hasard, puis une pièce dans ce coffret : elle est en or.

a) Quelle est la probabilité que l'autre pièce du coffret soit en or ?

b) Expliquer l'erreur du raisonnement « le coffret est le premier ou le deuxième, donc la probabilité est $\frac{1}{2}$ ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Garçons et filles

On suppose qu'un enfant est un garçon ou une fille avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment. Une famille a deux enfants.

a) Sachant que l'aîné est un garçon, quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?

b) Sachant qu'au moins un des enfants est un garçon, même question.

c) Expliquer pourquoi les réponses diffèrent.

Exercice 8 – Premier as à la troisième carte

On retourne une à une les cartes d'un jeu de 52 cartes bien mélangé.

a) Quelle est la probabilité que le premier as apparaisse à la troisième carte ?

b) À la k-ième carte ? (Exprimer en produit.)

c) Quelle est la probabilité que les deux premières cartes soient des as ?

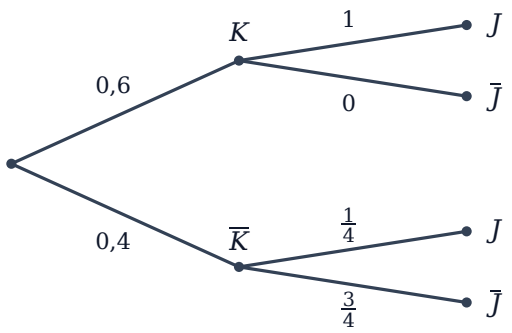
Exercice 9 – Savoir ou deviner ?

À un QCM à 4 réponses, un élève connaît la réponse avec probabilité 0,6 ; sinon il répond au hasard.

a) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste ?

b) Il a répondu juste. Quelle est la probabilité qu'il connaissait la réponse ?

c) Même question avec 2 réponses proposées au lieu de 4. Commenter.



K : il connaît ; J : il répond juste.

Exercice 10 – Une chaîne météorologique

S'il fait beau un jour, il fait beau le lendemain avec probabilité 0,8 ; s'il pleut, il fait beau le lendemain avec probabilité 0,4. On note p_n la probabilité qu'il fasse beau le jour n.

a) Montrer que $p_{n+1} = 0{,}4p_n + 0{,}4$.

b) En déduire p_n en fonction de p_0, et sa limite.

c) Il fait beau le jour 0. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le jour 3 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Le sophisme du procureur

Un crime a été commis dans une ville de 2 millions d'habitants ; le coupable en fait partie. Un indice (empreinte génétique partielle) est présent chez le coupable et, par coïncidence, chez chaque innocent avec probabilité 10^{-6}. Un suspect, choisi sans autre élément, présente l'indice.

a) Le procureur affirme : « la probabilité qu'un innocent présente l'indice est d'une chance sur un million, donc le suspect est coupable avec probabilité 0,999999 ». Quelle probabilité conditionnelle a-t-il calculée ?

b) On modélise : le suspect est un habitant pris au hasard, $\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2\times 10^{6}}$. Calculer $\mathbb{P}(C \mid I)$.

c) Conclure.

Exercice 12 – Un dé choisit l'urne

On lance un dé équilibré ; s'il donne k, on tire une boule dans une urne contenant k boules blanches et $6-k$ noires.

a) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

b) La boule est blanche. Quelle est la probabilité que le dé ait donné 6 ? qu'il ait donné 1 ?

c) Donner la loi de k sachant que la boule est blanche, et vérifier que la somme vaut 1.

Exercice 13 – Dépistage répété

Une maladie touche 1 % de la population. Un test est positif chez 95 % des malades et négatif chez 95 % des personnes saines. On suppose que, sachant l'état de la personne, deux tests successifs sont indépendants.

a) Une personne a un premier test positif. Probabilité qu'elle soit malade ?

b) Elle refait le test, à nouveau positif. Probabilité qu'elle soit malade ?

c) Montrer que b) s'obtient aussi en appliquant la formule de Bayes avec, comme probabilité a priori, le résultat de a).

Exercice 14 – La probabilité conditionnelle est une probabilité

Soit A un événement avec $\mathbb{P}(A) > 0$.

a) Montrer que $\mathbb{P}_A : B \mapsto \mathbb{P}(B \mid A)$ est une probabilité sur Ω.

b) En déduire $\mathbb{P}(\overline{B} \mid A) = 1 - \mathbb{P}(B \mid A)$ et $\mathbb{P}(B \cup C \mid A) = \mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(C \mid A) - \mathbb{P}(B \cap C \mid A)$.

c) A-t-on $\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(B \mid A)$? Donner un contre-exemple.

d) Montrer que $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B \mid A \cap C)\mathbb{P}(C \mid A) + \mathbb{P}(B \mid A \cap \overline{C})\mathbb{P}(\overline{C} \mid A)$ (lorsque ces conditionnements ont un sens).

Exercice 15 – Synthèse : ruine du joueur en trois étapes

Un joueur possède 1 ou 2 euros ; à chaque partie, il gagne 1 euro avec probabilité p et en perd 1 avec probabilité $q = 1 - p$. Il s'arrête s'il atteint 0 (ruine) ou 3 euros (succès). On note s_k la probabilité de succès en partant de k euros ($s_0 = 0$, $s_3 = 1$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) En conditionnant par le résultat de la première partie, montrer que $s_1 = ps_2$ et $s_2 = p + qs_1$.
b) En déduire s_1 et s_2 en fonction de p.
c) Calculer pour $p = \frac{1}{2}$ et pour $p = 0{,}6$.
d) Pour $p = \frac{1}{2}$, interpréter $s_k = \frac{k}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).