Plaquette 2 – Espaces probabilisés finis : modéliser et calculer

Probabilités finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Tout calcul de probabilité commence par le **choix d'un univers** Ω et d'une probabilité $\mathbb{P}$. Sur un univers fini, $\mathbb{P}$ est déterminée par les probabilités des issues, positives et de somme 1. Quand les issues sont équiprobables, on compte : $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card} A}{\mathrm{card}\Omega}$ — encore faut-il choisir un univers où l'équiprobabilité est justifiée (on distingue les dés, les boules, les cartes). On utilise ensuite les règles de calcul : complémentaire (« au moins un »), réunion (crible), inégalités (Boole) et, pour des tirages, le modèle adapté (simultané, successif avec ou sans remise).

Exercice 1 – Un dé truqué

Un dé à six faces est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir la face k soit proportionnelle à k.

a) Déterminer la probabilité de chaque face.

b) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair, puis un nombre premier.

c) On lance le dé deux fois, les lancers étant indépendants. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois la même face ?

Exercice 2 – Encadrer une intersection

Soient A, B deux événements avec $\mathbb{P}(A) = 0{,}7$ et $\mathbb{P}(B) = 0{,}6$.

a) Montrer que $\max(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$.

b) En déduire un encadrement de $\mathbb{P}(A \cap B)$ et de $\mathbb{P}(A \cup B)$.

c) Donner, sur $\Omega = [\![1, 10]\!]$ muni de l'équiprobabilité, des exemples réalisant les deux bornes.

d) A et B peuvent-ils être incompatibles ? indépendants ?

Exercice 3 – Somme de deux dés : choisir l'univers

On lance deux dés équilibrés et l'on s'intéresse à leur somme S.

a) Pourquoi l'univers $\{2, 3, \ldots, 12\}$ muni de l'équiprobabilité est-il un mauvais modèle ? Proposer un bon univers.

b) Donner la loi de S.

c) Leibniz pensait qu'obtenir 11 était aussi probable qu'obtenir 12. Comparer.

d) Quelle est la probabilité que la somme soit un nombre premier ?

Exercice 4 – Les paris du chevalier de Méré

a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?

c) Le chevalier pensait les deux paris équivalents (« 4 est à 6 comme 24 est à 36 »). Qu'en est-il ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Combien de lancers de deux dés faut-il pour que la probabilité d'au moins un double 6 dépasse $\frac{1}{2}$?

Exercice 5 – Tirages simultanés et successifs

Une urne contient 5 boules rouges et 3 noires. On tire 3 boules.

a) Tirage simultané : probabilité d'obtenir exactement 2 rouges.

b) Tirage successif sans remise : calculer la même probabilité en dénombrant des listes. Commenter.

c) Tirage successif avec remise : même question.

d) Expliquer pourquoi, pour une urne très grande, les réponses de a) et c) sont proches.

Exercice 6 – Une probabilité non uniforme sur [[1, n]]

Soit $n \geq 2$. On pose $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{2^k}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

a) Vérifier que l'on définit bien une probabilité sur $[\![1, n]\!]$.

b) Calculer $\mathbb{P}(\{1, \ldots, k\})$ pour $k \leq n-1$.

c) Interpréter ce modèle avec des lancers d'une pièce équilibrée (on s'arrête au premier Pile, ou après $n-1$ Face).

d) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair pour $n = 5$.

Exercice 7 – L'inégalité de Boole en pratique

Un système comporte 10 composants ; chacun tombe en panne dans l'année avec probabilité 0,01.

a) Sans aucune hypothèse d'indépendance, majorer la probabilité qu'au moins un composant tombe en panne.

b) En supposant les pannes indépendantes, calculer cette probabilité exactement. Comparer.

c) Montrer plus généralement que $1 - (1-p)^n \leq np$ pour $p \in [0, 1]$.

d) Combien de composants au plus pour que la probabilité d'au moins une panne reste inférieure à 5 %, quelle que soit la dépendance entre pannes ?

Exercice 8 – Au moins un as

On distribue une main de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

a) Quelle est la probabilité de n'avoir aucun as ?

b) En déduire la probabilité d'avoir au moins un as.

c) Quelle est la probabilité d'avoir exactement un as ? au moins deux ?

d) Retrouver b) par un calcul de tirages successifs.

Exercice 9 – Livres rangés au hasard

On range au hasard $n \geq 3$ livres distincts sur une étagère (les $n!$ ordres sont équiprobables). Parmi eux figurent les tomes 1, 2, 3 d'une même œuvre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Quelle est la probabilité que les trois tomes soient côte à côte, dans l'ordre $1, 2, 3$?

b) Côte à côte dans un ordre quelconque ?

c) Quelle est la probabilité que le tome 1 soit à gauche du tome 2 (pas forcément à côté) ? que les trois tomes soient dans l'ordre $1, 2, 3$ de gauche à droite ?

Exercice 10 – Une partie tirée au hasard

On choisit une partie X de $E = [\![1, n]\!]$ au hasard, les 2^n parties étant équiprobables.

a) Quelle est la probabilité que X contienne 1 ? qu'elle ait k éléments ?

b) Montrer que les événements « $i \in X$ », $1 \leq i \leq n$, sont mutuellement indépendants.

c) On choisit deux parties X et Y indépendamment. Quelle est la probabilité que $X \subset Y$? que $X \cap Y = \varnothing$?

Exercice 11 – Le plus grand de trois dés

On lance trois dés équilibrés et l'on note M le plus grand des trois résultats.

a) Calculer $\mathbb{P}(M \leq k)$ pour $k \in [\![1, 6]\!]$.

b) En déduire $\mathbb{P}(M = k)$.

c) Quelle est la probabilité qu'au moins un dé donne 6 ?

d) Vérifier que la somme des $\mathbb{P}(M = k)$ vaut 1.

Exercice 12 – Deux entiers au hasard

On choisit indépendamment et uniformément deux entiers a et b dans $[\![1, n]\!]$.

a) Calculer $\mathbb{P}(a = b)$, puis $\mathbb{P}(a < b)$ (utiliser la symétrie).

b) Calculer $\mathbb{P}(a + b = n + 1)$.

c) Calculer $\mathbb{P}(a \mid b)$ pour $n = 6$ (a divise b).

Exercice 13 – Trois sommets d'un hexagone

On choisit au hasard 3 sommets distincts d'un hexagone régulier.

a) Quelle est la probabilité que le triangle obtenu soit équilatéral ?

b) Rectangle ? (Un triangle inscrit est rectangle si et seulement si un de ses côtés est un diamètre.)

c) Isocèle non équilatéral ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

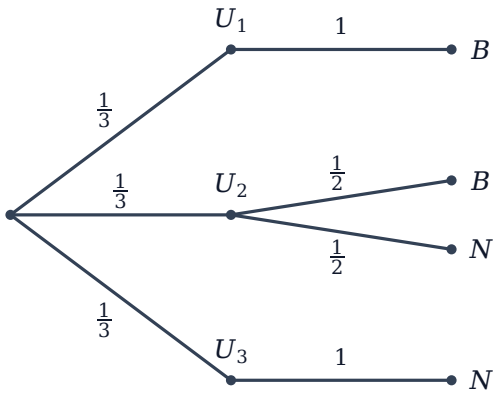
Exercice 14 – Tirage d'une boule dans une urne composite

On dispose de 3 urnes : U_1 contient 2 boules blanches, U_2 contient 1 blanche et 1 noire, U_3 contient 2 noires. On choisit une urne au hasard puis une boule dans cette urne.

a) Modéliser l'expérience et calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

b) Est-il équivalent de mettre les 6 boules dans une seule urne et d'en tirer une ?

c) Même question si U_1 contient 1 boule blanche, U_2 contient 1 blanche et 2 noires, U_3 contient 3 noires.



Choix de l'urne puis de la boule.

Exercice 15 – Synthèse : une permutation aléatoire

On choisit une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ au hasard ($n \geq 2$, les $n!$ permutations équiprobables).

a) Quelle est la probabilité que $\sigma(1) = 1$? que $\sigma(1) < \sigma(2)$?

b) Quelle est la probabilité que σ soit un cycle de longueur n ?

c) Quelle est la probabilité que σ soit une involution, pour $n = 4$?

d) Les événements $\{\sigma(1) = 1\}$ et $\{\sigma(2) = 2\}$ sont-ils indépendants ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).