Plaquette 4 – Indépendance et épreuves répétées

Probabilités finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

L'indépendance est le plus souvent une **hypothèse de modélisation** (lancers successifs, composants distincts, individus d'un échantillon) ; on en déduit que les probabilités d'intersections sont des produits. On distingue soigneusement l'indépendance **deux à deux** de l'indépendance **mutuelle**, et l'indépendance de l'indépendance **conditionnelle**. Pour n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p, la probabilité d'une suite donnée de k succès et $n-k$ échecs vaut $p^k(1-p)^{n-k}$, et celle d'obtenir exactement k succès $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. « Au moins un » se traite par le complémentaire.

Exercice 1 – Indépendance deux à deux mais pas mutuelle

On lance deux pièces équilibrées. A : « la première donne Pile », B : « la seconde donne Pile », C : « les deux pièces donnent le même résultat ».

a) Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants.

b) Sont-ils mutuellement indépendants ?

c) Interpréter : connaître A et B détermine C.

Exercice 2 – Fiabilité d'un système

Un système comporte trois composants A, B, C qui fonctionnent indépendamment, chacun avec probabilité 0,9.

a) Probabilité que le système fonctionne s'ils sont montés en série ? en parallèle ?

b) On monte A en série avec le bloc formé de B et C en parallèle. Probabilité de fonctionnement ?

c) Combien de composants identiques faut-il monter en parallèle pour une fiabilité d'au moins 0,9999 ?

Exercice 3 – Combien d'essais pour un succès probable ?

Une expérience réussit avec probabilité $p = 0{,}05$, les essais étant indépendants.

a) Probabilité d'au moins un succès en n essais ?

b) Combien d'essais faut-il pour que cette probabilité dépasse 0,99 ?

c) Comparer avec l'intuition « 20 essais suffisent puisque $20 \times 0{,}05 = 1$ ». Calculer la probabilité d'au moins un succès en 20 essais.

Exercice 4 – Temps d'attente du premier succès

On répète des épreuves indépendantes de succès de probabilité $p \in]0,1[$, au plus N fois. On note T le rang du premier succès (et $T = N+1$ s'il n'y en a pas).

a) Calculer $\mathbb{P}(T = k)$ pour $1 \leq k \leq N$ et $\mathbb{P}(T > k)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $\mathbb{P}(T > m+n \mid T > m) = \mathbb{P}(T > n)$ pour $m+n \leq N$ (absence de mémoire).

c) Pour un dé ($p = \frac{1}{6}$), quelle est la probabilité que le premier 6 sorte au 4^{e} lancer ? après le 10^{e} ?

Exercice 5 – Deux ou trois manches gagnantes ?

Un joueur gagne chaque manche contre son adversaire avec probabilité p, indépendamment ; $q = 1 - p$.

a) Quelle est la probabilité qu'il gagne un match en deux manches gagnantes (au plus 3 manches) ?

b) En trois manches gagnantes (au plus 5 manches) ?

c) Calculer pour $p = 0{,}6$ et commenter : un format plus long favorise-t-il le meilleur joueur ?

Exercice 6 – Exactement deux six

On lance 5 fois un dé équilibré.

a) Probabilité d'obtenir exactement deux 6 ? Justifier le coefficient binomial.

b) Probabilité d'obtenir au moins deux 6 ?

c) Quel est le nombre de 6 le plus probable ?

Exercice 7 – Indépendance conditionnelle n'est pas indépendance

Un sac contient une pièce équilibrée et une pièce à deux Piles. On choisit une pièce au hasard et on la lance deux fois. P_1, P_2 : « le lancer 1 (resp. 2) donne Pile ».

a) Sachant la pièce choisie, les lancers sont indépendants. Calculer $\mathbb{P}(P_1)$ et $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$.

b) P_1 et P_2 sont-ils indépendants ?

c) Calculer $\mathbb{P}(P_2 \mid P_1)$ et interpréter.

Exercice 8 – Parité du nombre de succès

On réalise n épreuves indépendantes, de succès de probabilité p. On note π_n la probabilité que le nombre de succès soit pair.

a) Montrer que $\pi_{n+1} = (1-p)\pi_n + p(1-\pi_n)$.

b) En déduire $\pi_n = \dfrac{1 + (1-2p)^n}{2}$.

c) Retrouver ce résultat avec le binôme : $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dfrac{(q+p)^n + (q-p)^n}{2}$.

d) Que vaut π_n pour $p = \frac{1}{2}$?

Exercice 9 – L'égalité au tennis

Au tennis, à « égalité », il faut gagner deux points de suite pour remporter le jeu ; sinon on revient à égalité. Un joueur gagne chaque point avec probabilité p, indépendamment ; $q = 1 - p$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que, partant de l'égalité, la probabilité e_n que le joueur ait gagné le jeu au plus tard après n « cycles » de deux points vérifie $e_n = p^2 \sum_{k=0}^{n-1} (2pq)^k$.

b) En déduire la limite $e = \dfrac{p^2}{p^2+q^2}$ quand $n \to +\infty$.

c) Calculer e pour $p = 0{,}6$ et comparer à p.

Exercice 10 – Contrôle qualité : avec ou sans remise

Un lot de 100 pièces contient 5 pièces défectueuses. On en prélève 10.

a) Prélèvement sans remise : probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse.

b) Prélèvement avec remise : même question. Comparer.

c) On accepte le lot si l'échantillon (sans remise) contient au plus une pièce défectueuse. Calculer la probabilité d'accepter le lot. (On donne $\binom{95}{9}\binom{5}{1} \approx 5{,}87 \times 10^{12}$ et $\binom{100}{10} \approx 1{,}73 \times 10^{13}$.)

Exercice 11 – Événements liés à des lancers distincts

On lance deux dés, modélisés par $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ muni de l'équiprobabilité.

a) Montrer que pour toutes parties U, V de $[\![1,6]\!]$, les événements $A = \{\text{premier dé} \in U\}$ et $B = \{\text{second dé} \in V\}$ sont indépendants.

b) En déduire l'indépendance de « le premier dé est pair » et « le second dé est ≥ 5 ».

c) « La somme vaut 7 » et « le premier dé vaut 3 » sont-ils indépendants ? Et « la somme vaut 8 » et « le premier dé vaut 3 » ?

Exercice 12 – Pile ou face : le nombre de Piles le plus probable

On lance n fois une pièce équilibrée.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement k Piles ?

b) Quelle est la valeur de k la plus probable ? Calculer sa probabilité pour $n = 10$ et $n = 100$ (on donne $\binom{100}{50} \approx 1{,}009 \times 10^{29}$ et $2^{100} \approx 1{,}268 \times 10^{30}$).

c) Commenter : la probabilité d'obtenir exactement autant de Piles que de Faces tend-elle vers 1, vers 0 ?

Exercice 13 – Indépendance mutuelle et complémentaires

Soient $A_1, \ldots, A_n$ mutuellement indépendants.

a) Montrer que $\overline{A_1}, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

b) En déduire que l'on peut remplacer n'importe quels A_i par leurs complémentaires.

c) En déduire $\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \prod_i (1 - \mathbb{P}(A_i))$.

d) Application : trois tireurs visent une cible, avec probabilités 0,5, 0,6, 0,8 de l'atteindre, indépendamment. Probabilité que la cible soit touchée ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Le premier qui tire un six

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle un dé équilibré, A commençant. Le premier qui obtient un 6 gagne ; la partie s'arrête sans vainqueur si personne n'a obtenu de 6 après que chacun a lancé 3 fois.

a) Quelle est la probabilité que A gagne à son k-ième lancer ($1 \leq k \leq 3$) ?

b) En déduire la probabilité que A gagne, que B gagne, qu'il n'y ait pas de vainqueur.

c) Vérifier que la somme vaut 1 et calculer le rapport des chances de A et de B. Commenter.

Exercice 15 – Synthèse : amplifier un algorithme probabiliste

Un algorithme probabiliste répond à une question par « oui » ou « non ». À chaque exécution, il se trompe avec probabilité $\varepsilon = \frac{1}{4}$, indépendamment des autres exécutions.

a) On l'exécute 3 fois et l'on retient la réponse majoritaire. Quelle est la probabilité d'erreur ?

b) On suppose l'erreur **unilatérale** : si la bonne réponse est « oui », l'algorithme répond toujours « oui » ; si c'est « non », il répond « oui » à tort avec probabilité $\frac{1}{4}$. On répond « non » dès qu'une exécution dit « non ». Probabilité d'erreur après k exécutions ?

c) Combien d'exécutions faut-il en b) pour garantir une erreur inférieure à 10^{-6} ?

d) Comparer l'efficacité des deux stratégies.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).