Plaquette 5 – Modéliser l'aléatoire : chaînes, génétique, stratégies

Probabilités finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Les situations réelles se modélisent souvent par un **système qui évolue par étapes** : on note p_n (ou un vecteur X_n) la loi de l'état à l'étape n, et la formule des probabilités totales donne une **récurrence** $X_{n+1} = MX_n$, que l'on résout (suite arithmético-géométrique, diagonalisation). On rencontre aussi des problèmes d'**inférence** (Bayes pour mettre à jour une croyance), de **stratégie** (choisir la règle qui maximise une probabilité) et de **fiabilité** (conditionner sur un composant). On termine toujours par une interprétation concrète du résultat.

Exercice 1 – Une machine qui tombe en panne

Une machine en marche un jour tombe en panne le lendemain avec probabilité 0,1 ; en panne, elle est réparée le lendemain avec probabilité 0,6. Elle marche le jour 0. On note p_n la probabilité qu'elle marche le jour n.

a) Établir la relation entre p_{n+1} et p_n.

b) En déduire p_n et sa limite.

c) Interpréter la limite comme une proportion de jours de fonctionnement à long terme.

Exercice 2 – Marche aléatoire sur un triangle

Un pion se déplace sur les sommets A, B, C d'un triangle ; à chaque étape, il va sur l'un des deux autres sommets avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Il part de A. On note a_n la probabilité d'être en A à l'étape n.

a) Montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n)$.

b) En déduire $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Calculer a_1, a_2, a_3 et vérifier par énumération des chemins pour a_2.

Exercice 3 – La loi de Hardy-Weinberg

Un gène a deux allèles A et a. Dans une population, les génotypes AA, Aa, aa sont en proportions u, v, w ($u + v + w = 1$). Chaque enfant reçoit un allèle de chacun de ses parents, choisis au hasard dans la population, chaque parent transmettant l'un de ses deux allèles avec probabilité $\frac{1}{2}$.

a) Montrer qu'un allèle transmis est A avec probabilité $p = u + \frac{v}{2}$.

b) En déduire les proportions de génotypes à la génération suivante : p^2, $2pq$, q^2 ($q = 1 - p$).

c) Montrer que ces proportions sont ensuite stables (équilibre dès la deuxième génération).

d) Application : $u = 0{,}5$, $v = 0{,}2$, $w = 0{,}3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Le modèle des urnes d'Ehrenfest

Deux boules sont réparties entre deux urnes. À chaque étape, on choisit une des deux boules au hasard et on la change d'urne. On note X_n le nombre de boules dans l'urne 1 (0, 1 ou 2).

a) Donner les probabilités de passage d'un état à l'autre.

b) On part de $X_0 = 2$. Calculer la loi de X_1, X_2, X_3, puis de X_n selon la parité de n.

c) Montrer que la loi $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ est stationnaire. La loi de X_n converge-t-elle vers elle ?

Exercice 5 – Pile-Pile contre Face-Pile

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que l'une des séquences *PP* ou *FP* apparaisse (deux lancers consécutifs).

a) Montrer que *PP* apparaît avant *FP* si et seulement si les deux premiers lancers sont *PP*.

b) En déduire la probabilité que *PP* gagne.

c) Même question pour *PP* contre *PF*. Commenter l'asymétrie.

Exercice 6 – Collisions dans une table de hachage

Un programme range n clés dans une table de m cases ; chaque clé tombe dans une case au hasard, uniformément et indépendamment.

a) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune collision (deux clés dans la même case) ?

b) Application : $n = 10$, $m = 100$.

c) Montrer que cette probabilité est au plus $\exp\left(-\frac{n(n-1)}{2m}\right)$ (utiliser $1 - x \le \mathrm{e}^{-x}$) et commenter pour $n = 30$, $m = 1\,000$.

Exercice 7 – Le problème du recrutement

4 candidats de valeurs distinctes se présentent dans un ordre aléatoire (les 24 ordres équiprobables). Après chaque entretien, on doit accepter ou refuser définitivement. Stratégie S_k : refuser les k premiers, puis accepter le premier candidat meilleur que tous les précédents (s'il n'y en a pas, on n'embauche personne).

a) Montrer que S_0 réussit (embauche le meilleur) avec probabilité $\frac{1}{4}$.

b) Pour S_1 : le meilleur est en position $j \in \{2, 3, 4\}$; montrer que S_1 le choisit si et seulement si le meilleur des $j-1$ premiers est en position 1, ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{j-1}$.

c) En déduire la probabilité de succès de S_1, puis celle de S_2, et conclure.

Exercice 8 – Le problème des partis

Deux joueurs de même force jouent une série de parties ; le premier à 3 victoires remporte la mise. La série est interrompue alors que A mène 2 victoires à 1. Comment partager équitablement la mise ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer qu'il suffirait d'au plus 2 parties supplémentaires, et lister les issues de 2 parties fictives.

b) En déduire la probabilité que A aurait gagné, et le partage.

c) Même question si A mène 2 à 0 et que 4 victoires sont nécessaires.

Exercice 9 – Un gène lié au chromosome X

Le daltonisme est dû à un allèle récessif porté par le chromosome X. Une femme a une mère porteuse saine et un père non daltonien ; elle a donc, a priori, une chance sur deux d'être porteuse. Un fils d'une porteuse est daltonien avec probabilité $\frac{1}{2}$; un fils d'une non-porteuse ne l'est pas.

a) Elle a un fils non daltonien. Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse ?

b) Elle a deux fils non daltoniens (indépendance sachant son statut). Même question.

c) Généraliser à k fils non daltoniens.

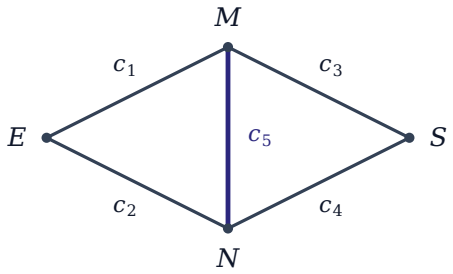
Exercice 10 – Le pont de Wheatstone

Un réseau relie E à S par cinq composants fonctionnant indépendamment avec probabilité p : c_1 ($E \to M$), c_2 ($E \to N$), c_3 ($M \to S$), c_4 ($N \to S$) et un pont c_5 entre M et N (utilisable dans les deux sens). Le réseau fonctionne s'il existe un chemin de composants en état de marche de E à S.

a) Si c_5 fonctionne, M et N sont confondus : exprimer la fiabilité R_1 du réseau.

b) Si c_5 est en panne, exprimer la fiabilité R_0.

c) En déduire la fiabilité $R = pR_1 + (1-p)R_0$ et la calculer pour $p = 0{,}9$.



Le pont : c5 relie M et N.

Exercice 11 – Quelle pièce a-t-on choisie ?

Un sac contient trois pièces : l'une donne Pile avec probabilité $\frac{1}{4}$, une autre $\frac{1}{2}$, la troisième $\frac{3}{4}$. On en choisit une au hasard et on la lance deux fois : on obtient deux Piles.

a) Calculer la probabilité a posteriori de chaque pièce.

b) Quelle est la probabilité que le troisième lancer donne Pile ?

c) Comparer avec la probabilité d'obtenir Pile au premier lancer, avant toute observation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Le paradoxe de Simpson

Deux traitements sont comparés sur des patients atteints de calculs rénaux, petits ou gros :

	Petits calculs	**Gros calculs**
Traitement A	81 succès / 87	192 / 263
Traitement B	234 / 270	55 / 80

a) Calculer les taux de succès de chaque traitement pour chaque taille de calcul. Lequel est meilleur ?

b) Calculer les taux globaux. Lequel paraît meilleur ?

c) Expliquer le paradoxe à l'aide de la formule des probabilités totales.

Exercice 13 – Contamination dans un réseau d'ordinateurs

Un virus infecte un ordinateur O_1. Chaque jour, un ordinateur infecté transmet le virus à un ordinateur sain donné avec probabilité 0,3, indépendamment. Le réseau compte deux autres ordinateurs O_2 et O_3, reliés chacun à O_1 et entre eux. Seuls les ordinateurs infectés **au début** d'une journée peuvent transmettre le virus pendant cette journée. On observe le réseau pendant deux jours.

a) Quelle est la probabilité que O_2 soit infecté à la fin du premier jour ? que les deux le soient ? qu'aucun ne le soit ?

b) Sachant qu'exactement un des deux est infecté après le premier jour, quelle est la probabilité que l'autre le soit à la fin du second jour (il peut être contaminé par O_1 ou par l'ordinateur infecté) ?

c) Probabilité que tout le réseau soit infecté après deux jours.

Exercice 14 – Sondage et échantillon

Dans une association de 10 membres, 4 sont favorables à un projet. On interroge 3 membres choisis au hasard (sans remise).

a) Quelle est la probabilité qu'une majorité de l'échantillon soit favorable ?

b) Quelle est la probabilité que l'échantillon donne une image exacte de la proportion de favorables, arrondie au tiers le plus proche ?

c) Si l'on interrogeait les membres avec remise (un membre peut être interrogé deux fois), que deviendrait a) ?

Exercice 15 – Synthèse : chaîne à deux états sous forme matricielle

Un système a deux états 1 et 2 ; il passe de 1 à 2 avec probabilité a et de 2 à 1 avec probabilité b ($0 < a + b < 2$). On note $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ la loi de l'état à l'étape n.

a) Montrer que $X_{n+1} = MX_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

b) Vérifier que $M\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1-a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) En déduire X_n en décomposant X_0 dans la base formée de ces deux vecteurs, et la limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Application : $a = 0{,}1$, $b = 0{,}6$, $X_0 = (1, 0)$; retrouver l'exercice de la machine.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).