Plaquette 4 – Ensembles, applications et relations

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Image directe $f(A) = \{f(x),\, x \in A\}$; **image réciproque** $f^{-1}(B) = \{x \in E,\, f(x) \in B\}$ (définie même si f n'est pas bijective).

- f **injective** : $\forall (x, x'),\, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$; **surjective** : $\forall y \in F,\, \exists x \in E,\, y = f(x)$.
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ; $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
- f bijective $\Leftrightarrow \exists g,\, g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$ (alors $g = f^{-1}$).
- **Relation d'équivalence** : réflexive, symétrique, transitive ; ses classes forment une **partition**. **Relation d'ordre** : réflexive, antisymétrique, transitive.
- **Indicatrices** :

$$1_{A\cap B} = 1_A 1_B, \qquad 1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B, \qquad 1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$$

Correction de l'exercice 1 – Réunions et intersections indexées

a) 0 appartient à tous les intervalles. Si $x \neq 0$, il existe n avec $\frac{1}{n} < |x|$ (Archimède), et $x \notin \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$:

$$\bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

b) Chaque $\left[\frac{1}{n}, 1\right] \subset]0, 1]$. Réciproquement, si $x \in]0, 1]$, il existe n avec $\frac{1}{n} \leq x$: $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Réunion : $]0, 1]$.

c) Un réel x n'appartient pas à $[n, +\infty[$ dès que $n > x$: intersection **vide**. Tout x vérifie $|x| \leq n$ pour n assez grand : réunion $= \mathbb{R}$.

d) a) donne $\{0\}$, qui n'est pas ouvert ; b) donne $]0, 1]$, qui n'est pas fermé. (Les propriétés « ouvert » et « fermé » ne passent qu'aux intersections et réunions **finies** respectivement.)

Réponse. a) $\{0\}$; b) $]0, 1]$; c) $\varnothing$ et $\mathbb{R}$; d) contre-exemples a) et b).

Correction de l'exercice 2 – Différence symétrique

a) $x \in A\Delta B$ si et seulement si x est dans exactement un des deux ensembles, soit $|1_A(x) - 1_B(x)| = 1$. Les indicatrices valant 0 ou 1, $|a - b| = a + b - 2ab$.

b) Modulo 2, $1_{A\Delta B} \equiv 1_A + 1_B$. Donc

$$1_{(A\Delta B)\Delta C} \equiv 1_A + 1_B + 1_C \equiv 1_{A\Delta(B\Delta C)}\ [2]$$

- et deux indicatrices égales modulo 2 sont égales (valeurs 0 ou 1).

c) $1_{A\Delta B} = 0 \Leftrightarrow 1_A = 1_B \Leftrightarrow A = B$.

d) $A\Delta A = \varnothing$ et $\varnothing$ est neutre. Si $A\Delta X = B$, alors $A\Delta(A\Delta X) = A\Delta B$, soit $X = A\Delta B$ (analyse) ; et $A\Delta(A\Delta B) = B$ (synthèse). Unique solution : $X = A\Delta B$.

Réponse. $1_{A\Delta B} \equiv 1_A + 1_B\ [2]$; Δ associative ; $X = A\,\Delta\,B$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Images directes et réciproques

a) $f([-1,2]) = [0,4]$ (le minimum 0 est atteint en 0).
$f^{-1}([1,4]) = \{x : 1 \le x^2 \le 4\} = [-2,-1] \cup [1,2]$. $f^{-1}([-4,-1]) = \varnothing$ (un carré est positif).

b) $A \cap B = \{0\}$, $f(A \cap B) = \{0\}$; mais $f(A) = f(B) = [0,4]$:

$$f(A \cap B) = \{0\} \subsetneq [0,4] = f(A) \cap f(B)$$

c) Si $y = f(x)$ avec $x \in A \cap B$, alors $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$. Si f est injective et $y = f(a) = f(b)$ avec $a \in A$, $b \in B$, alors $a = b \in A \cap B$.

d) $x \in f^{-1}(C \cap D) \Leftrightarrow f(x) \in C$ et $f(x) \in D \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$: chaîne d'équivalences.

Réponse. $f([-1,2]) = [0,4]$, $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$; $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$ en général ; f^{-1} respecte $\cap$.

Correction de l'exercice 4 – Injective sans être surjective, et inversement

a) $2n = 2n' \Rightarrow n = n'$: injective. 1 n'a pas d'antécédent (nombre impair) : non surjective.

b) Tout m a pour antécédent $2m$: surjective. $g(0) = g(1) = 0$: non injective.

c) $g(f(n)) = \left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor = n$, donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Mais $f(g(n)) = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ vaut $n-1$ si n est impair :

$$g \circ f = \mathrm{id}, \qquad f \circ g \neq \mathrm{id}$$

— f a un inverse à gauche, g un inverse à droite, sans être bijectives.

d) Pour E fini, une injection $E \to E$ a une image de même cardinal que E, donc égale à E : elle est surjective. De même, une surjection est injective. En cardinal fini, injectif $\Leftrightarrow$ surjectif $\Leftrightarrow$ bijectif.

Réponse. f injective non surjective, g surjective non injective ; $g \circ f = \mathrm{id}$, $f \circ g \neq \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 5 – Composition et injectivité

a) Si $f(x) = f(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$.

b) Soit $z \in G$: il existe x avec $g(f(x)) = z$, donc $y = f(x)$ est un antécédent de z par g.

c) $E = \{0\}$, $F = \{0,1\}$, $G = \{0\}$, $f(0) = 0$ et g constante : $g \circ f$ est injective (ensemble de départ à un élément), mais $g(0) = g(1)$.

d) $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$, et de même dans l'autre sens :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

— (on « défait » dans l'ordre inverse, comme on enlève ses chaussures avant ses chaussettes).

Réponse. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ; $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective ; $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Correction de l'exercice 6 – Une bijection de R sur]−1, 1[

a) $|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$; $f(-x) = \frac{-x}{1+|x|} = -f(x)$.

b) $f(x)$ a le signe de x. Pour $y \ge 0$, on cherche $x \ge 0$: $\frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y + xy \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$ (solution ≥ 0, unique). Pour $y < 0$, par imparité, $x = \frac{y}{1+y}$.

c) Chaque $y \in]-1,1[$ a un unique antécédent :

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $(1-|y| = 1-y$ si $y \geq 0$, $1+y$ si $y<0.)$

d) $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{1/2} = 1$ et $f(1) = \frac{1}{2}$ ✓ ; $f^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-3/4}{1/4} = -3$ et $f(-3) = \frac{-3}{4}$ ✓

Réponse. f bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.

Correction de l'exercice 7 – Une bijection de N² sur N

a) $\varphi(0,0)=0$, $\varphi(1,0)=1$, $\varphi(0,1)=2$, $\varphi(2,3) = 4\times 7 - 1 = 27$.

b) Si $\varphi(p,q) = \varphi(p',q')$, alors $2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$. Tout entier $m \geq 1$ s'écrit de façon unique $2^p \times$ (impair) (p = exposant de 2 dans m) : $p = p'$ et $2q+1 = 2q'+1$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$: $m = n+1 \geq 1$ s'écrit $2^p k$ avec k impair, $k = 2q+1$, et $\varphi(p,q) = n$.

d) $95+1 = 96 = 2^5 \times 3$: $p=5$, $2q+1=3$, $q=1$.

$$\varphi(5,1) = 32\times 3 - 1 = 95$$

— $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$: il est **dénombrable** (« autant » de couples que d'entiers).

Réponse. φ bijective (écriture $n+1 = 2^p(2q+1)$) ; $\varphi^{-1}(95) = (5,1)$; $\mathbb{N}^2$ dénombrable.

Correction de l'exercice 8 – Une relation d'équivalence sur R

a) Réflexive : $x-x = 0 \in \mathbb{Z}$. Symétrique : $y-x = -(x-y) \in \mathbb{Z}$. Transitive : $x-z = (x-y)+(y-z) \in \mathbb{Z}$.

b) $\overline{1/3} = \left\langle \frac{1}{3}+k,\ k\in\mathbb{Z}\right\rangle$, $\overline{0} = \mathbb{Z}$.

c) $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ et $x-(x-\lfloor x\rfloor) = \lfloor x\rfloor \in \mathbb{Z}$: la partie fractionnaire est dans la classe. Unicité : deux éléments de $[0,1[$ diffèrent de moins de 1 en valeur absolue ; si leur différence est entière, elle est nulle.

$$\overline{x} \cap [0,1[\ = \{x - \lfloor x\rfloor\}$$

d) $a \equiv b \Leftrightarrow n \mid a-b$: mêmes vérifications. Chaque classe contient un unique reste $r \in \{0,\dots,n-1\}$ (division euclidienne) : n classes.

Réponse. Équivalence ; classes $x+\mathbb{Z}$, représentant $x-\lfloor x\rfloor \in [0,1[$; modulo n : n classes.

Correction de l'exercice 9 – L'ordre de divisibilité

a) $a \mid a$; si $a \mid b$ et $b \mid a$ dans $\mathbb{N}^*$, alors $a \leq b \leq a$: $a=b$; si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$. Non totale : $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$.

b) Minimaux : 2 et 3 (aucun autre élément de E ne les divise) ; pas de plus petit élément (ni $2 \mid 3$ ni $3 \mid 2$). Maximal et plus grand : 12 (tous le divisent).

c) Minorants communs de 4 et 6 : leurs diviseurs communs $1, 2$; le plus grand pour l'ordre est 2. Majorants : multiples communs $12, 24, \dots$; le plus petit est 12.

$$\inf(4,6) = \mathrm{pgcd}(4,6) = 2, \qquad \sup(4,6) = \mathrm{ppcm}(4,6) = 12$$

d) Sur $\mathbb{Z}^*$, $2 \mid -2$ et $-2 \mid 2$ avec $2 \neq -2$: l'antisymétrie tombe, ce n'est plus un ordre (seulement un préordre).

Réponse. Ordre partiel ; dans E : minimaux 2, 3, plus grand 12 ; inf = pgcd, sup = ppcm.

Correction de l'exercice 10 – Calculer avec les indicatrices

a) $1_A 1_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$. $1 - 1_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \notin A$. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ donne $1 - 1_{A\cup B} = (1-1_A)(1-1_B)$, d'où la formule.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $1_{\overline{A \cap B}} = 1 - ab$ (en notant $a = 1_A$, $b = 1_B$), et $1_{\overline{A} \cup \overline{B}} = (1-a) + (1-b) - (1-a)(1-b) = 1 - ab$ ✓

c) Avec $a^2 = a$: $1_{(A \cup B) \cap (A \cup C)} = (a + b - ab)(a + c - ac) = a + bc - abc$ (après simplification), qui est $1_{A \cup (B \cap C)} = a + bc - abc$ ✓

d) $1 - 1_{A \cup B \cup C} = (1-a)(1-b)(1-c)$; en développant et en sommant sur $x \in E$:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Réponse. Tout se ramène à l'algèbre de 0 et 1 ($a^2 = a$) ; crible par $1 - 1_{\cup} = \prod (1 - 1)$.

Correction de l'exercice 11 – Théorème de Cantor

a) Si $a \in D$, par définition $a \notin f(a) = D$: contradiction. Si $a \notin D = f(a)$, alors par définition de D, $a \in D$: contradiction.

b) Aucun a ne vérifie $f(a) = D$: D n'a pas d'antécédent, f n'est pas surjective.

c) $1 \in f(1)$ et $2 \in f(2)$: $D = \varnothing$, qui n'est bien l'image d'aucun élément ✓

d) Pour $|E| = n$:

$$|P(E)| = 2^n > n$$

— Pour $E = \mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$ n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$: il n'est **pas dénombrable** ; il y a des infinis de tailles différentes. (L'argument est une « diagonale » : D diffère de chaque $f(x)$ en l'élément x.)

Réponse. $a \in D \Leftrightarrow a \notin D$: contradiction ; pas de surjection $E \to P(E)$; $P(\mathbb{N})$ non dénombrable.

Correction de l'exercice 12 – Relations d'équivalence sur un ensemble à trois éléments

a) $x \in \overline{x}$ (réflexivité), donc les classes sont non vides et recouvrent E. Si $\overline{x} \cap \overline{y} \ni z$, alors $x \sim z \sim y$ et, par transitivité, $\overline{x} = \overline{y}$: deux classes sont égales ou disjointes.

b) « Même partie » est réflexif et symétrique ; transitif car un élément n'est que dans une seule partie.

c) Partitions : $\{abc\}$; $\{a\}\{bc\}$, $\{b\}\{ac\}$, $\{c\}\{ab\}$; $\{a\}\{b\}\{c\}$:

$$1 + 3 + 1 = 5 \text{ relations d'équivalence (nombre de Bell } B_3)$$

d) Une relation est une partie de E^2 (9 couples) : $2^9 = 512$ relations, dont 5 d'équivalence, soit moins de 1 %.

Réponse. Équivalences ↔ partitions ; 5 équivalences sur 3 éléments, parmi 512 relations.

Correction de l'exercice 13 – Compter injections et surjections

a) Une injection f réalise une bijection de E sur $f(E) \subset F$, donc $|E| = |f(E)| \leq |F|$.

b) Images distinctes choisies successivement : $5 \times 4 \times 3 = 60$ injections ; applications : $5^3 = 125$.

c) Parmi les $2^4 = 16$ applications, seules les 2 constantes ne sont pas surjectives :

$$2^4 - 2 = 14$$

d) Par a), une injection imposerait $6 \leq 5$. Autrement dit : 6 objets dans 5 tiroirs, deux partagent un tiroir (deux antécédents d'une même image).

Réponse. $|E| \leq |F|$; 60 injections, 125 applications ; 14 surjections ; pas d'injection $6 \to 5$ (tiroirs).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Produit cartésien et parties

a) $A \times B = \{(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)\}$; $B \times A$ contient $(x,1) \neq (1,x)$: différents (sauf cas particuliers), mais de même cardinal 6.

b) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ (4 éléments), donc $|P(P(A))| = 2^4 = 16$.

c) (u,v) est dans les deux produits $\Leftrightarrow u \in A$, $v \in B$, $u \in C$, $v \in D \Leftrightarrow (u,v) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

d) Non. $A = D = \{1\}$, $B = C = \{2\}$: $(A \times B) \cup (C \times D) = \{(1,2),(2,1)\}$ mais

$$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{1,2\}^2 \ni (1,1)$$

Réponse. $|A \times B| = 6$, $A \times B \neq B \times A$; $|P(P(A))| = 16$; $\cap$ oui, $\cup$ non.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : images, images réciproques et bijectivité

a) Si $x \in A$, $f(x) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Si $y = f(x)$ avec $f(x) \in B$, alors $y \in B$.

b) Si f est injective et $x \in f^{-1}(f(A))$: $f(x) = f(a)$ avec $a \in A$, donc $x = a \in A$.
Réciproquement, avec $A = \{x\}$: $f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$, donc $f(x') = f(x) \Rightarrow x' = x$.

c) Si f est surjective et $y \in B$, $y = f(x)$ avec $x \in f^{-1}(B)$: $y \in f(f^{-1}(B))$. Réciproquement, avec $B = F$: $f(E) = f(f^{-1}(F)) = F$.

d) $f^{-1}(f([0,1])) = f^{-1}([0,1]) = [-1,1] \supsetneq [0,1]$ (f non injective) ;
$f(f^{-1}([-1,1])) = f([-1,1]) = [0,1] \subsetneq [-1,1]$ (f non surjective) :

$$A \subsetneq f^{-1}(f(A)), \qquad f(f^{-1}(B)) \subsetneq B$$

Réponse. f injective $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$; surjective $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$; exemple x^2 : inclusions strictes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).