Plaquette 2 – Logique : quantificateurs, négations et implications

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Négation : on échange $\forall$ et $\exists$ et l'on nie la propriété finale ; les ensembles de variation ne changent pas.

$$\text{non}\,(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon$$

— $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ et non } Q)$; $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } P \text{ ou } Q)$.

— **Ordre** : $\exists y,\ \forall x$ entraîne $\forall x,\ \exists y$, mais pas l'inverse (dans le second, y peut dépendre de x).

— **Condition nécessaire / suffisante** : dans $P \Rightarrow Q$, P est suffisante pour Q et Q est nécessaire pour P.

— **Existence et unicité** : $\exists!\, x,\ P(x)$ signifie $\exists x,\ P(x)$ et $\forall x, x',\ (P(x) \text{ et } P(x')) \Rightarrow x = x'$.

Correction de l'exercice 1 – Limite d'une suite : écrire et nier

a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. « (u_n) converge » : $\exists \ell \in \mathbb{R}$ devant la phrase précédente.

b)

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon$$

c) Prenons $\varepsilon = 1$. Pour tout N, l'entier $n = 2N + 1 \geq N$ est impair : $|u_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > 1$ ✓

d) $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ u_n \geq A$. Négation : $\exists A,\ \forall N,\ \exists n \geq N,\ u_n < A$.

— Pour $u_n = n(1 + (-1)^n)$: $A = 1$ convient, car pour tout N, $n = 2N + 1$ donne $u_n = 0 < 1$. (La suite n'est pourtant pas majorée : $u_{2k} = 4k$.)

Réponse. Négation : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall N,\ \exists n \geq N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon$; $\varepsilon = 1$, $n = 2N + 1$; $A = 1$ pour la seconde suite.

Correction de l'exercice 2 – Continuité et continuité uniforme

a) Continuité : $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in I,\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

— Uniforme : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ \ldots$ (même fin). Seule la **place de** $\forall x$ change : dans l'uniforme continuité, δ ne dépend pas de x.

b) C'est « $\exists \delta,\ \forall x$ » $\Rightarrow$ « $\forall x,\ \exists \delta$ » : le même δ convient pour chaque x.

c)

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leq \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

d) $\varepsilon = 1$. Pour tout $\delta > 0$, on choisit $n \geq \frac{1}{\delta}$ et $x = n$, $y = n + \frac{1}{n}$: $|x - y| = \frac{1}{n} \leq \delta$ et $|y^2 - x^2| = 2 + \frac{1}{n^2} > 1$ ✓ La fonction est « de plus en plus raide » : aucun δ unique ne convient partout.

Réponse. Différence : place de $\forall x$; x^2 : $\varepsilon = 1$, $x = n$, $y = n + \frac{1}{n}$, écart $2 + \frac{1}{n^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – L'ordre des quantificateurs

a) Première vraie ($y = x + 1$). Seconde fausse : sa négation $\forall y,\, \exists x,\, x \geq y$ est vraie ($x = y$).

b) Première fausse : pour $n = 0$, aucun $m \in \mathbb{N}$ ne vérifie $m < 0$. Seconde vraie ($m = 0$, plus petit élément de $\mathbb{N}$).

c) Première vraie ($y = \frac{x}{2}$). Seconde fausse : un tel y vérifierait $y < \frac{y}{2}$ en prenant $x = \frac{y}{2}$, absurde. $]0, +\infty[$ n'a pas de plus petit élément.)

d) Soit y_0 tel que $\forall x,\, P(x, y_0)$. Pour tout x, $y = y_0$ convient :

$$(\exists y,\, \forall x,\, P(x,y)) \Longrightarrow (\forall x,\, \exists y,\, P(x,y))$$

— La réciproque est fausse (exemples a et c) : dans « $\forall x,\, \exists y$ », y peut **dépendre** de x.

Réponse. a) V, F ; b) F, V ; c) V, F ; « $\exists y \forall x$ » est plus fort que « $\forall x \exists y$ ».

Correction de l'exercice 4 – Fonctions majorées, bornées, monotones

a) Majorée : $\exists M,\, \forall x,\, f(x) \leq M$; négation : $\forall M,\, \exists x,\, f(x) > M$. Bornée : $\exists M,\, \forall x,\, |f(x)| \leq M$; négation : $\forall M,\, \exists x,\, |f(x)| > M$.

b) Soit $M \geq 0$. On prend $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec k entier $> M$: $f(x) = x > M$. Donc f n'est pas majorée, a fortiori pas bornée.

c) Croissante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. « Non monotone » = ni croissante ni décroissante :

$$\exists (x,y),\, x \leq y \text{ et } f(x) > f(y) \quad \text{et} \quad \exists (x',y'),\, x' \leq y' \text{ et } f(x') < f(y')$$

d) $-1 \leq 0$ et $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$: non croissante. $0 \leq 1$ et $f(0) = 0 < 1 = f(1)$: non décroissante.

Réponse. Négation de « majorée » : $\forall M,\, \exists x,\, f(x) > M$; $x \sin x$: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; x^2 : couples $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.

Correction de l'exercice 5 – Tables de vérité et implications

a) $P \Rightarrow Q$ n'est fausse que pour P vrai et Q faux ; de même (non P) ou Q n'est fausse que si non P et Q sont faux. Tables identiques.

b) Avec a) :

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow \text{non } P \text{ ou non } Q \text{ ou } R \Leftrightarrow \text{non}(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \Rightarrow R$$

c) P, Q, R fausses : $P \Rightarrow Q$ est vraie, donc $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ est **fausse** ; mais $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est **vraie** (P faux).

d) Les deux parenthésages diffèrent : pas d'associativité. Négation :
non $((P \text{ et } Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow P$ et Q et non R.

Réponse. $P \Rightarrow Q \equiv$ non P ou Q ; $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \text{ et } Q) \Rightarrow R$; contre-exemple : tout faux.

Correction de l'exercice 6 – Conditions nécessaires, suffisantes

a) $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$: suffisante. Pas nécessaire : $x = -2$.

b) $n = 4k = 2(2k)$: suffisante. Pas nécessaire : $n = 2$.

c) Équivalence, par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$|x| < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1$$

— Condition nécessaire et suffisante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Ni l'un ni l'autre : $x = \frac{1}{2} > 0$ mais $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ (pas suffisante) ; $x = -1$ vérifie $x^2 = 1 > -1$ mais $x < 0$ (pas nécessaire). En fait $x^2 > x \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Réponse. a) suffisante ; b) suffisante ; c) nécessaire et suffisante ; d) ni l'une ni l'autre.

Correction de l'exercice 7 – Raisonner par disjonction de cas

a) $n = 3k$: $n^2 = 9k^2$, reste 0. $n = 3k+1$: $n^2 = 3(3k^2+2k)+1$, reste 1. $n = 3k+2$: $n^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$, reste 1.

b) n^2+1 a pour reste 1 ou 2 : jamais 0. Les restes de a^2+b^2 sont $0+0$, $0+1$, $1+0$, $1+1$; seul le premier donne 0, d'où $3 \mid a$ et $3 \mid b$.

c) $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$: parmi trois entiers consécutifs, l'un est pair et l'un est multiple de 3 ; 2 et 3 étant premiers entre eux,

$$6 \mid (n-1)n(n+1)$$

d) Si $x \geq 1$: $2x \geq 2$, égalité pour $x = 1$. Si $x \leq -1$: $-2x \geq 2$, égalité pour $x = -1$. Si $-1 \leq x \leq 1$: $(1-x)+(x+1) = 2$. Égalité exactement sur $[-1, 1]$.

Réponse. $n^2 \equiv 0$ ou 1 [3] ; 3 ne divise jamais n^2+1 ; $6 \mid n^3 - n$; $|x-1|+|x+1| \geq 2$, égalité sur $[-1, 1]$.

Correction de l'exercice 8 – Contraposée

a) Contraposée : si n est impair, $n = 2k+1$, alors $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$ est impair.

b) Si $n = 2k+1$:

$$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$$

— et $k(k+1)$ est pair (deux entiers consécutifs), donc $8 \mid n^2 - 1$. La contraposée donne l'énoncé.

c) On peut raisonner directement : $\frac{x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = x+1 \Leftrightarrow 0 = 1$, impossible. La contraposée de « $x \neq -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} \neq 1$ » est « $\frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = -1$ » (vraie car la prémisse n'est jamais satisfaite).

d) Réciproque de a) : « si n est pair, n^2 est pair » : vraie aussi ($n = 2k$, $n^2 = 4k^2$). Mais c'est un **autre** énoncé : la contraposée est équivalente à l'énoncé, la réciproque ne l'est pas en général.

Réponse. n impair $\Rightarrow n^2$ impair ; n impair $\Rightarrow n^2 - 1 = 4k(k+1)$ divisible par 8.

Correction de l'exercice 9 – Deux raisonnements par l'absurde

a) $\log_2 3 > 0$; si $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors $3 = 2^{p/q}$, soit

$$3^q = 2^p$$

— Le membre de gauche est impair, celui de droite pair ($p \geq 1$) : contradiction.

b) $N > 1$ a un facteur premier p, qui est l'un des p_i. Alors $p \mid N$ et $p \mid p_1 \cdots p_r$, donc $p \mid 1$: contradiction.

c) Supposons $x + \frac{1}{x} < 2$ avec $x > 0$: en multipliant par $x > 0$, $x^2 - 2x + 1 < 0$, soit $(x-1)^2 < 0$, absurde.

d) Non : $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30\,031 = 59 \times 509$. L'argument prouve seulement que les facteurs premiers de N sont **nouveaux**.

Réponse. $3^q = 2^p$ impossible ; $p \mid 1$ absurde ; $(x-1)^2 < 0$ absurde ; $30\,031 = 59 \times 509$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Équivalences en cycle

a) $|0| = 0 \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

b) Soit $n \geq 1$; on applique (ii) avec $\varepsilon = \frac{1}{2n} > 0$: $|a| \leq \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$.

c) Si $a \neq 0$, alors $|a| > 0$; par la propriété d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n > \frac{1}{|a|}$, soit $|a| > \frac{1}{n}$: contradiction avec (iii).

d) Chaque implication manquante s'obtient en suivant la boucle, par exemple :

$$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) \quad \text{donne} \quad (ii) \Rightarrow (i)$$

— Trois implications au lieu de six.

Réponse. $(i) \Rightarrow (ii)$ immédiat ; $\varepsilon = \frac{1}{2n}$; Archimède pour $(iii) \Rightarrow (i)$.

Correction de l'exercice 11 – Existence et unicité

a)

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 + x = 1 \quad \text{et} \quad \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ (x^3 + x = 1 \text{ et } x'^3 + x' = 1) \Rightarrow x = x'$$

b) $g(x) = x^3 + x - 1$ est continue, $g(0) = -1 < 0$, $g(1) = 1 > 0$: il existe $x \in]0, 1[$ avec $g(x) = 0$.

c) $g' = 3x^2 + 1 > 0$: g strictement croissante, donc injective. Directement : $x^3 - x'^3 + x - x' = 0$, soit $(x - x')(x^2 + xx' + x'^2 + 1) = 0$; or $x^2 + xx' + x'^2 = \left(x + \frac{x'}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x'^2 \geq 0$, donc le second facteur est ≥ 1, et $x = x'$.

d) $g(0{,}6) = 0{,}216 + 0{,}6 - 1 = -0{,}184 < 0$ et $g(0{,}7) = 0{,}343 + 0{,}7 - 1 = 0{,}043 > 0$: solution dans $]0{,}6\,;0{,}7[$ ($\approx 0{,}682$).

Réponse. Existence par TVI, unicité par stricte croissance (ou factorisation) ; solution dans $]0{,}6\,;0{,}7[$.

Correction de l'exercice 12 – Traduire des énoncés célèbres

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 4 \text{ et } 2 \mid n) \Rightarrow \exists (p, q) \in P^2,\ n = p + q$.

— Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 4,\ 2 \mid n$ et $\forall (p, q) \in P^2,\ n \neq p + q$.

b) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_{n+1} = u_n$; négation : $\forall N,\ \exists n \geq N,\ u_{n+1} \neq u_n$.

c)

$$\exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)$$

— Négation : $\forall T > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x + T) \neq f(x)$.

d) Un **seul** entier pair $n \geq 4$ qui ne soit somme d'aucun couple de premiers : la négation d'un énoncé universel est existentielle.

Réponse. Goldbach : $\forall n$ pair ≥ 4, $\exists (p, q) \in P^2$, $n = p + q$; réfutation : un seul contre-exemple.

Correction de l'exercice 13 – Vrai ou faux : quantificateurs dans R

a) Faux : négation $\exists x,\ \forall y,\ y^2 \neq x$; $x = -1$ convient ($y^2 \geq 0$).

b) Vrai : $x = y^2$.

c) Faux : négation $\forall x,\ \exists y,\ x + y \leq 0$; $y = -x$ donne $0 \leq 0$.

d) Vrai (densité de $\mathbb{Q}$). Soit $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (Archimède), et $q = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$q \le x < q + \frac{1}{n} \implies |x - q| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Réponse. a) F ($x = -1$) ; b) V ; c) F ($y = -x$) ; d) V, $q = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Correction de l'exercice 14 – Nier une définition à trois quantificateurs

a) Une suite bornée l'est à partir du rang 0. Réciproquement, si $|u_n| \le M$ pour $n \ge N$, alors pour tout n :

$$|u_n| \le \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, M)$$

— (un nombre **fini** de termes est toujours borné).

b) $\forall M \ge 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M$.

c) $u_n = (-1)^n n$: pour tout M, $n = \lfloor M \rfloor + 1$ donne $|u_n| = n > M$.

d) Si $u_n \to \ell$, avec $\varepsilon = 1$ il existe N tel que $|u_n - \ell| \le 1$ pour $n \ge N$, donc $|u_n| \le |\ell| + 1$ pour $n \ge N$: bornée à partir d'un rang, donc bornée par a).

Réponse. Bornée ⇔ bornée à partir d'un rang ; négation $\forall M,\ \exists n,\ |u_n| > M$; convergente ⇒ bornée.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : suites de Cauchy

a) Si $u_n \to \ell$: soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|u_n - \ell| \le \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \ge N$. Pour $p, q \ge N$, par l'inégalité triangulaire,

$$|u_p - u_q| \le |u_p - \ell| + |\ell - u_q| \le \varepsilon$$

b) $\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists (p, q) \ge N,\ |u_p - u_q| > \varepsilon$.

c) $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$: n termes, chacun $\ge \frac{1}{2n}$, donc somme $\ge n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

d) Prenons $\varepsilon = \frac{1}{4}$: pour tout $N \ge 1$, $p = 2N$ et $q = N$ vérifient $|H_p - H_q| \ge \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. La suite n'est pas de Cauchy, donc (par la contraposée de a) elle ne converge pas ; croissante, elle tend vers $+\infty$.

Réponse. Convergente ⇒ Cauchy ; $H_{2n} - H_n \ge \frac{1}{2}$; $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $(p, q) = (2N, N)$: (H_n) diverge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).