Plaquette 3 – Modes de raisonnement : récurrences, absurde, analyse-synthèse

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Récurrence double : $P(0)$ et $P(1)$, puis $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$.

- **Récurrence forte** : $P(n_0)$, puis $(\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ P(k)) \Rightarrow P(n+1)$.
- **Principe du bon ordre** : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (équivalent à la récurrence).
- **Descente infinie** : il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels ; un « plus petit contre-exemple » mène donc à une contradiction.
- **Analyse-synthèse** :

  analyse : solution ⇒ forme imposée synthèse : forme imposée ⇒ solution

- La rédaction de la synthèse est **indispensable** : l'analyse ne donne qu'une condition nécessaire.

Correction de l'exercice 1 – Récurrence double

a) $u_2 = 9-4 = 5$, $u_3 = 15-6 = 9$, $u_4 = 27-10 = 17$: $2, 3, 5, 9, 17$, soit $2^n + 1$.

b) $P(n)$: « $u_n = 2^n + 1$ ». $P(0)$: $2 = 1+1$ ✓ ; $P(1)$: $3 = 2+1$ ✓ Si $P(n)$ et $P(n+1)$:

$$u_{n+2} = 3(2^{n+1}+1) - 2(2^n+1) = 6\cdot 2^n - 2\cdot 2^n + 1 = 2^{n+2} + 1$$

c) u_{n+2} dépend de **deux** termes : il faut supposer la formule aux rangs n et $n+1$, et donc initialiser aux **deux** premiers rangs.

d) $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$: $u_n = \lambda + \mu 2^n$; $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ donnent $\lambda = \mu = 1$ ✓

Réponse. $u_n = 2^n + 1$, par récurrence double (deux initialisations).

Correction de l'exercice 2 – Récurrence forte : écriture en base 2

a) $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $3 = 2^1 + 2^0$.

b) Si $n+1 = 2m$ avec $1 \leq m \leq n$: par hypothèse $m = \sum_{i \in I} 2^i$, donc $n+1 = \sum_{i \in I} 2^{i+1}$. Si $n+1$ est impair, n est pair et s'écrit $\sum_{i \in I} 2^i$ avec tous les $i \geq 1$ (sinon n serait impair), donc

$$n+1 = 2^0 + \sum_{i \in I} 2^i$$

c) Pair : on décale tous les exposants de 1, ils restent distincts. Impair : on ajoute 2^0, absent de l'écriture de n (pair).

d) $45 = 1 + 44$, $44 = 2\times 22$, $22 = 2\times 11$, $11 = 1 + 10$, $10 = 2\times 5$, $5 = 1+4$, $4 = 2^2$: $45 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 32 + 8 + 4 + 1$ ✓

Réponse. Récurrence forte (pair : $\frac{n+1}{2}$; impair : n) ; $45 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Inégalité de Bernoulli

a) $n = 0$: $1 \geq 1$ ✓ Si $(1+x)^n \geq 1 + nx$, on multiplie par $1 + x \geq 0$ (l'inégalité est conservée) :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

b) Dans la multiplication par $1 + x$, qui doit être **positif**. Contre-exemple : $x = -3$, $n = 5$: $(-2)^5 = -32 < 1 - 15 = -14$, l'inégalité est fausse.

c) $x = \frac{1}{n}$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \times \frac{1}{n} = 2$.

d) $a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx \to +\infty$ car $x = a - 1 > 0$; par comparaison, $a^n \to +\infty$.

Réponse. $(1+x)^n \geq 1 + nx$ pour $x \geq -1$; contre-exemple $x = -3$, $n = 5$; $a^n \geq 1 + n(a-1) \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4 – Où est l'erreur ?

a) Avec 2 chevaux $\{c_1, c_2\}$: les « n premiers » sont $\{c_1\}$, les « n derniers » $\{c_2\}$. Leur intersection est **vide** : rien ne relie les deux couleurs.

b) L'implication fausse est $P(1) \Rightarrow P(2)$:

$$\{c_1, \ldots, c_n\} \cap \{c_2, \ldots, c_{n+1}\} = \{c_2, \ldots, c_n\} \neq \varnothing \Leftrightarrow n \geq 2$$

c) Pour $n \geq 2$, l'argument est correct ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$). Mais la chaîne est rompue au premier maillon : sans $P(2)$ (qui est faux), on ne peut rien conclure.

d) L'hérédité doit être valable pour **tout** $n \geq n_0$, y compris le premier ; vérifier l'argument sur le plus petit cas révèle souvent une hypothèse cachée (ici, « les deux groupes se chevauchent »).

Réponse. L'hérédité $P(1) \Rightarrow P(2)$ est fausse : les deux sous-groupes ne se chevauchent pas.

Correction de l'exercice 5 – Somme des cubes

a) $n = 1$: $1 = 1^2$ ✓ Hérédité :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2\left(n^2 + 4n + 4\right)}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour $n = 4$: $1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$ ✓

c) $\left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 - \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 = 210^2 - 55^2 = 44\,100 - 3025 = 41\,075$.

d) $\frac{n^2(n+1)^2}{4} \sim \frac{n^4}{4}$ (cohérent avec $\int_0^n t^3\,\mathrm{d}t = \frac{n^4}{4}$).

Réponse. $\sum k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; $\sum_{11}^{20} k^3 = 41\,075$; équivalent $\frac{n^4}{4}$.

Correction de l'exercice 6 – Descente infinie

a) L'ensemble des $x \geq 1$ tels qu'il existe $y \geq 1$ avec $x^2 = 2y^2$ serait une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle a un plus petit élément x_0, associé à y_0.

b) $x_0^2 = 2y_0^2$ est pair, donc x_0 est pair (contraposée : un carré d'impair est impair) : $x_0 = 2x_1$. Alors $4x_1^2 = 2y_0^2$, soit $y_0^2 = 2x_1^2$: y_0 est pair, $y_0 = 2y_1$.

c) $(2x_1)^2 = 2(2y_1)^2$ donne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$x_1^2 = 2y_1^2, \qquad 1 \le x_1 = \frac{x_0}{2} < x_0$$

— Contradiction avec la minimalité de x_0 : aucune solution.

d) Si $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$ $(x, y \ge 1)$, alors $x^2 = 2y^2$: impossible. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Réponse. Une solution minimale en fournirait une plus petite $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$: absurde ; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 7 – Principe du bon ordre et diviseurs premiers

a) L'ensemble des diviseurs ≥ 2 de n est non vide (il contient n) : il a un plus petit élément d. Si $d = ab$ avec $1 < a < d$, alors a divise n et $a < d$: contradiction ; d est premier.

b) $n = dm$ avec $m \ge 2$ (car n n'est pas premier), et m est un diviseur ≥ 2, donc $m \ge d$: $n = dm \ge d^2$.

c) n est premier s'il n'a aucun diviseur d avec $2 \le d \le \sqrt{n}$. $\sqrt{221} \approx 14{,}9$: on teste $2, 3, 5, 7, 11, 13$; $221 = 13 \times 17$: **non premier**.

d) Si $P(0)$ et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, mais que $F = \{n : P(n) \text{ fausse}\}$ est non vide, soit $m = \min F$. $m \neq 0$, donc $m - 1 \in \mathbb{N}$ et $P(m-1)$ est vraie (minimalité) :

$$P(m-1) \Rightarrow P(m)$$

— contradiction avec $m \in F$. Donc $F = \varnothing$.

Réponse. Le plus petit diviseur ≥ 2 est premier et $\le \sqrt{n}$ si n est composé ; $221 = 13 \times 17$.

Correction de l'exercice 8 – Analyse-synthèse : une équation fonctionnelle

a) En remplaçant x par $1 - x$: $f(1-x) + 2f(x) = 1 - x$. On multiplie par 2 et on soustrait la relation initiale :

$$3f(x) = 2(1-x) - x = 2 - 3x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{2}{3} - x$$

b) $f(x) + 2f(1-x) = \frac{2}{3} - x + 2\left(\frac{2}{3} - 1 + x\right) = \frac{2}{3} - x + \frac{4}{3} - 2 + 2x = x$ ✓

c) L'analyse montre qu'une solution est **nécessairement** $x \mapsto \frac{2}{3} - x$ (unicité), la synthèse qu'elle convient (existence).

d) En $1 - x$: $f(1-x) + f(x) = 1 - x$. Comparée à $f(x) + f(1-x) = x$, cela impose $x = 1 - x$ pour **tout** x : impossible pour $x = 0$. Aucune solution — l'analyse a ici abouti à une contradiction, la synthèse n'a pas lieu d'être.

Réponse. Unique solution $f(x) = \frac{2}{3} - x$; pour $f(x) + f(1-x) = x$: aucune solution.

Correction de l'exercice 9 – Fonctions additives sur Q

a) $x = y = 0$: $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Puis $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$.

b) $f(0 \cdot x) = 0$ ✓ ; $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x)$. Pour $n < 0$: $f(nx) = -f(-nx) = -(-n)f(x) = nf(x)$.

c) $qf\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1)$:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a\,\frac{p}{q}$$

d) Analyse : $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Synthèse : $x \mapsto ax$ est bien additive. Les solutions sont exactement les $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$. (Sur $\mathbb{R}$, il faut une hypothèse de plus, par exemple la continuité, pour conclure de même.)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f(x) = f(1)\,x$ sur $\mathbb{Q}$: les solutions sont les applications linéaires $x \mapsto ax$.

Correction de l'exercice 10 – Racines rationnelles et absurde

a) $p^3 + pq^2 + q^3 = 0$. Donc $p \mid q^3$ (car $q^3 = -p(p^2+q^2)$) ; p étant premier avec q, il est premier avec q^3 et divise donc 1 (Gauss). De même $q \mid p^3$, donc $q \mid 1$.

b) Les seuls candidats sont ± 1 : $1+1+1 = 3 \neq 0$ et $-1-1+1 = -1 \neq 0$. Aucune racine rationnelle.

c) $g(x) = x^3 + x + 1$ est continue, $g(-1) = -1 < 0$, $g(0) = 1 > 0$: racine dans $]-1, 0[$ (TVI), irrationnelle.

d) Pour $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, le même argument donne $q \mid 1$:

$$\text{racine rationnelle} \implies \text{racine entière divisant } a_0$$

Réponse. Seuls candidats ± 1, qui ne conviennent pas ; racine réelle irrationnelle dans $]-1, 0[$.

Correction de l'exercice 11 – Récurrences sur des produits

a) $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$: produit télescopique $\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = n+1$. Récurrence : $(n+1)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = n+2$ ✓

b) $1! = 1 = 2^0$ ✓ ; $(n+1)! = (n+1)\,n! \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ car $n+1 \geq 2$.

c) $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$; $n=2$: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\times 2}$ ✓ Hérédité :

$$\frac{n+1}{2n} \times \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

d) $\frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$.

Réponse. $\prod (1 + \frac{1}{k}) = n+1$; $n! \geq 2^{n-1}$; $\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Récurrence et divisibilité

a) $n=0$: $3+4 = 7$ ✓ Si $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$:

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = 9 \cdot 7k - 7 \cdot 2^{n+2}$$

— (car $9 \cdot 3^{2n+1} = 9(7k - 2^{n+2})$), multiple de 7.

b) $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n \equiv 3 \cdot 2^n$ et $2^{n+2} = 4 \cdot 2^n$: somme $\equiv 7 \cdot 2^n \equiv 0$ [7].

c) $n=0$: 0 ✓ Si $9^n = 8n + 1 + 64k$:
$9^{n+1} - 8(n+1) - 1 = 9(8n + 1 + 64k) - 8n - 9 = 64n + 576k = 64(n + 9k)$ ✓

d) $n=2$: $3^5 + 2^4 = 243 + 16 = 259 = 7 \times 37$ ✓ ; $81 - 16 - 1 = 64$ ✓

Réponse. $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$; $64 \mid 9^n - 8n - 1$; $n=2$: $259 = 7 \times 37$, 64.

Correction de l'exercice 13 – Fibonacci : identités par récurrence

a) $n=1$: $F_2 F_0 - F_1^2 = -1$ ✓ Hérédité :
$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$ ✓

b) Un diviseur commun de F_n et F_{n+1} divise $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, donc $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \pm 1$: il vaut 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $F_1 = 1 = \varphi^0$, $F_2 = 1 \leq \varphi$ ✓ Si $F_n \leq \varphi^{n-1}$ et $F_{n+1} \leq \varphi^n$:

$$F_{n+2} \leq \varphi^n + \varphi^{n-1} = \varphi^{n-1}(\varphi + 1) = \varphi^{n+1}$$

d) $55 \leq 76$ ✓ (en fait $F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, soit ≈ 55 pour $n = 10$).

Réponse. Cassini par récurrence ; $\text{pgcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$; $F_n \leq \varphi^{n-1}$ par récurrence double.

Correction de l'exercice 14 – Triplets pythagoriciens et parité

a) $n = 2k$: $n^2 = 4k^2 \equiv 0$; $n = 2k+1$: $n^2 = 4(k^2+k) + 1 \equiv 1$ [4].

b) Si a et b sont impairs, $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2$ [4], reste impossible pour un carré : contradiction.

$$a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 = 2 \ [4]$$

c) Les carrés sont $\equiv 0$ ou 1 [3]. Si aucun des trois n'était multiple de 3 : $a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 = 2$ [3], alors que $c^2 \equiv 1$: contradiction.

d) $(3, 4, 5)$: 4 pair, $3 \mid 3$; $(5, 12, 13)$: 12 pair et multiple de 3 ; $(8, 15, 17)$: 8 pair, $3 \mid 15$ ✓

Réponse. Carrés $\equiv 0$ ou 1 [4] ; a, b impairs donnerait $c^2 \equiv 2$ [4] ; l'un des trois est multiple de 3.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le problème des pièces de 3 et 5

a) 3, 5, $6 = 3 + 3$ sont payables ; 1, 2, 4, 7 ne le sont pas ($7 - 3 = 4$ et $7 - 5 = 2$ ne sont pas payables).

b) $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$. Soit $n \geq 10$ tel que toutes les sommes de 8 à n soient payables ; alors $n - 2 \geq 8$ est payable, et

$$n + 1 = (n - 2) + 3$$

— l'est aussi (une pièce de 3 de plus).

c) L'hérédité utilise le rang $n - 2$, **trois** crans en arrière : pour atteindre 11 il faut 8, pour 12 il faut 9, pour 13 il faut 10. Chaque classe de reste modulo 3 a besoin de son initialisation.

d) $3 \times 5 - 3 - 5 = 7$: c'est bien la plus grande somme impayable ✓ (théorème de Sylvester).

Réponse. Impayables : $1, 2, 4, 7$; tout $n \geq 8$ est payable (récurrence forte, trois initialisations) ; $ab - a - b = 7$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).