Plaquette 1 – Quantificateurs, modes de raisonnement et ensembles

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et méthodes du cours.

- **Quantificateurs** : $\forall$ (« pour tout ») et $\exists$ (« il existe »). L'ordre des quantificateurs **change** le sens de l'énoncé.
- **Négation** : on échange les quantificateurs et on nie la propriété :
$$\text{non}(\forall x \in E,\, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E,\, \text{non}\, P(x), \qquad \text{non}(\exists x \in E,\, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E,\, \text{non}\, P(x)$$
- Négation d'une implication : $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P$ et $\text{non}\, Q$.
- **Contraposée** : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}\, Q \Rightarrow \text{non}\, P)$. C'est une **équivalence**, pas une réciproque.
- **Raisonnement par l'absurde** : on suppose $\text{non}\, P$ et l'on aboutit à une contradiction.
- **Récurrence** : initialisation, hérédité ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$), conclusion.
- **Analyse-synthèse** : l'analyse donne la forme nécessaire de la solution, la synthèse vérifie qu'elle convient.
- **Ensembles** : $A \subset B$ signifie $\forall x,\, (x \in A \Rightarrow x \in B)$. Égalité par **double inclusion** : $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$.
- **Lois de De Morgan** : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- **Distributivité** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, et symétriquement.

Correction de l'exercice 1 – Traduire avec des quantificateurs

- a) $\forall x \in \mathbb{R},\, x^2 \geq 0$.
- b) $\exists n \in \mathbb{N},\, n > 10^6$.
- c) $\exists c \in [0\,;1],\, f(c) = 0$.
- **Remarque de rédaction** : on précise toujours l'**ensemble** dans lequel varie la variable. Écrire « $\forall x,\, x^2 \geq 0$ » sans préciser $\mathbb{R}$ est incomplet (et faux dans $\mathbb{C}$).

Réponse. a) $\forall x \in \mathbb{R},\, x^2 \geq 0$ · b) $\exists n \in \mathbb{N},\, n > 10^6$ · c) $\exists c \in [0\,;1],\, f(c) = 0$.

Correction de l'exercice 2 – Ordre des quantificateurs

- P **est vraie** : pour chaque réel x, on peut choisir $y = x + 1$, qui dépend de x et vérifie $y > x$.
- Q **est fausse** : elle affirme l'existence d'un réel y **fixé** plus grand que **tous** les réels. Or $y + 1 > y$ fournit un contre-exemple.
- **Leçon essentielle** : dans P, le y peut dépendre de x ; dans Q, il doit être choisi **avant** x, donc uniformément. Intervertir deux quantificateurs de nature différente change le sens.

Réponse. P est vraie, Q est fausse : l'ordre des quantificateurs est déterminant.

Correction de l'exercice 3 – Nier une proposition

On échange les quantificateurs et on nie la conclusion.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— a) $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 0$.
— b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.
— c) $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$, $|u_n - \ell| \geq \varepsilon$.
— La proposition c) est la définition de « $u_n \to \ell$ » ; sa négation signifie que la suite **ne converge pas** vers ℓ.
— **Méthode** : on nie de gauche à droite, en remplaçant chaque $\forall$ par $\exists$ et réciproquement, puis en niant la propriété finale.

Réponse. c) $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N$, $\exists n \geq N$, $|u_n - \ell| \geq \varepsilon$.

Correction de l'exercice 4 – Contraposée

Contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair.

— Supposons n impair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
— Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, qui est **impair**.
— La contraposée est donc démontrée, ce qui prouve l'implication de départ.
— **Pourquoi la contraposée ?** La démonstration directe supposerait $n^2 = 2m$ sans information exploitable sur n ; ici, l'hypothèse « n impair » se traduit immédiatement par une écriture.

Réponse. Contraposée : $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ impair.

Correction de l'exercice 5 – Raisonnement par l'absurde

Par l'absurde, supposons $\sqrt{2}$ rationnel.

— Il existe alors p, q entiers, $q \neq 0$, **premiers entre eux**, tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
— En élevant au carré : $2q^2 = p^2$, donc p^2 est pair, et d'après l'exercice précédent p est pair : $p = 2k$.
— Alors $2q^2 = 4k^2$, donc $q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q est pair.
— **Contradiction** : p et q sont tous deux pairs, alors qu'ils étaient supposés premiers entre eux.
— Conclusion : $\sqrt{2}$ est **irrationnel**.
— Remarque : l'hypothèse « fraction irréductible » est essentielle ; c'est elle qui fournit la contradiction.

Réponse. $2q^2 = p^2$ force p et q pairs : contradiction avec l'irréductibilité.

Correction de l'exercice 6 – Récurrence simple

Initialisation ($n = 1$) : le membre de gauche vaut 1, celui de droite $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$. La propriété est vraie.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

— Alors $\sum_{k=1}^{n+1} k = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\dfrac{n}{2} + 1\right) = (n+1)\dfrac{n+2}{2}$.
— C'est exactement la formule au rang $n+1$: la propriété est héréditaire.

Conclusion : par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Contrôle pour $n = 4$: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ et $\dfrac{4 \times 5}{2} = 10$. Correct.

Réponse. Initialisation, hérédité, conclusion : la formule est établie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Récurrence avec inégalité

Initialisation ($n = 5$) : $2^5 = 32$ et $5^2 = 25$, donc $32 > 25$. Vrai.

Hérédité : supposons $2^n > n^2$ pour un $n \geq 5$.

— Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2$.

— Il suffit de montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2$, c'est-à-dire $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$, soit $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.

— Or pour $n \geq 5$: $n^2 - 2n - 1 = n(n-2) - 1 \geq 5 \times 3 - 1 = 14 > 0$. C'est donc vérifié.

— Ainsi $2^{n+1} > 2n^2 \geq (n+1)^2$: la propriété est héréditaire.

Conclusion : $2^n > n^2$ pour tout $n \geq 5$.

— Remarque : la propriété est **fausse** pour $n = 2$, 3 et 4 ($4 = 4$, $8 < 9$, $16 = 16$), d'où l'initialisation à 5.

Réponse. Initialisation en $n = 5$, puis $2^{n+1} > 2n^2 \geq (n+1)^2$ car $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.

Correction de l'exercice 8 – Analyse-synthèse

Analyse (condition nécessaire). Supposons $f = p + i$ avec p paire et i impaire.

— Pour tout x : $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(x) - i(x)$.

— En additionnant : $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$; en soustrayant : $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

— Si une telle décomposition existe, elle est donc **unique**.

Synthèse (vérification). Posons

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

— $p(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$: p est bien **paire**.

— $i(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$: i est bien **impaire**.

— Et $p(x) + i(x) = f(x)$: la décomposition convient.

Conclusion : existence et unicité sont établies.

Réponse. $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ (analyse puis synthèse).

Correction de l'exercice 9 – Inclusion d'ensembles

a) Soit $n \in A$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$.

— Alors $n = 2 \times (3k)$: n est pair, donc $n \in B$.

— Comme n était quelconque dans A, on a $A \subset B$.

b) **Non** : $4 \in B$ (il est pair) mais $4 \notin A$ (il n'est pas multiple de 6).

— Un **contre-exemple** suffit à réfuter une inclusion.

— Conclusion : l'inclusion est **stricte**, $A \subsetneq B$.

Réponse. a) $n = 6k = 2(3k) \cdot$ b) non : $4 \in B \setminus A$.

Correction de l'exercice 10 – Double inclusion

On procède par **double inclusion**.

Sens direct. Soit $x \in A \cap (B \cup C)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Alors $x \in A$ **et** ($x \in B$ ou $x \in C$).
— Si $x \in B$: alors $x \in A \cap B$. Si $x \in C$: alors $x \in A \cap C$.
— Dans les deux cas, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Sens réciproque. Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

— Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$; dans les deux cas $x \in A$, et x appartient à B ou à C, donc à $B \cup C$.
— Donc $x \in A \cap (B \cup C)$.

Conclusion : les deux inclusions donnent l'égalité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Réponse. Double inclusion : les deux ensembles contiennent exactement les mêmes éléments.

Correction de l'exercice 11 – Lois de De Morgan

On traduit l'appartenance et on utilise la négation logique.

— $x \in \overline{A \cup B}$ signifie $x \notin A \cup B$, c'est-à-dire non($x \in A$ ou $x \in B$).
— Or la négation d'un « ou » est un « et » de négations : cela équivaut à ($x \notin A$ **et** $x \notin B$).
— Ce qui s'écrit $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$, c'est-à-dire

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

— Toutes les étapes étant des **équivalences**, on obtient directement l'égalité (sans double inclusion séparée).
— Illustration : le complémentaire de « les élèves qui font du latin **ou** du grec » est « ceux qui ne font **ni** latin **ni** grec ».

Réponse. Négation d'un « ou » : $x \notin A$ et $x \notin B$, donc $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Correction de l'exercice 12 – Contre-exemple

— a) Contre-exemple : $x = 0{,}5$ donne $x^2 = 0{,}25 < 0{,}5$. L'affirmation est donc fausse.
— Remarque : elle est vraie pour $x > 1$ et pour $x < 0$, mais fausse sur $]0\,;1[$.
— b) Contre-exemple : $A = \{1\,;2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$.
— Alors $A \cup B = \{1\,;2\} = A \cup C$, mais $B \neq C$.
— **Méthode** : pour réfuter une proposition universelle, un seul contre-exemple explicite suffit — et il doit être **vérifié**.

Réponse. a) $x = 0{,}5$ · b) $A = \{1\,;2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$.

Correction de l'exercice 13 – Récurrence forte : décomposition en nombres premiers

a) Si $n + 1 = ab$ est composé, ses facteurs a, b sont compris entre 2 et n, mais **pas forcément égaux à** n : connaître $P(n)$ seul ne dit rien sur eux.

b) Soit $n \geq 2$ tel que $P(k)$ soit vraie pour $2 \leq k \leq n$.

— Si $n + 1$ est premier, il est lui-même un produit (à un facteur) de nombres premiers.
— Sinon $n + 1 = ab$ avec $2 \leq a, b \leq n$; par hypothèse a et b sont des produits de premiers, donc $n + 1$ aussi.

$$(\forall k \in [\![2, n]\!],\ P(k)) \Longrightarrow P(n+1)$$

c) $360 = 2 \times 180$, puis $180 = 2 \times 90$, $90 = 2 \times 45$, $45 = 3 \times 15$, $15 = 3 \times 5$:
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ (chaque facteur composé est plus petit, et l'on redescend jusqu'à des

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

premiers).

d) 2 est premier, donc $P(2)$ est vraie ; l'hérédité forte s'applique alors à 3, puis 4, etc. : aucune autre initialisation n'est nécessaire, car l'hérédité utilise tous les rangs **déjà** établis.

Réponse. Récurrence forte : $n+1$ premier, ou $n+1 = ab$ avec $a, b \leq n$;
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Correction de l'exercice 14 – Principe des tiroirs

a) Si chaque tiroir contenait au plus un objet, il y aurait au plus n objets, contradiction avec $n+1$.

b) Les n tiroirs $\{2k-1, 2k\}$ $(1 \leq k \leq n)$ recouvrent $\{1, \ldots, 2n\}$; avec $n+1$ entiers, deux tombent dans le même tiroir : ils sont **consécutifs**, m et $m+1$. Un diviseur commun d divise $(m+1) - m = 1$:

$$\text{pgcd}(m, m+1) = 1$$

c) On découpe le carré en 4 carrés de côté 1 (les tiroirs). Deux des 5 points sont dans le même petit carré, donc à distance au plus sa diagonale, $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

d) Les n entiers pairs $2, 4, \ldots, 2n$ ne contiennent aucun couple consécutif (et sont deux à deux non premiers entre eux) : la borne $n+1$ est optimale.

Réponse. Tiroirs $\{2k-1, 2k\}$: deux entiers consécutifs, donc premiers entre eux ; 4 petits carrés : distance $\leq \sqrt{2}$; les n pairs montrent l'optimalité.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : raisonnement complet

Notons $P(n)$: « $6 \mid n(n+1)(2n+1)$ ».

Initialisation ($n = 0$) : le produit vaut 0, divisible par 6. Vrai.

Hérédité : supposons $P(n)$, c'est-à-dire $n(n+1)(2n+1) = 6k$ pour un entier k.

— Calculons le terme suivant : $(n+1)(n+2)(2n+3)$.

— On développe la différence :

$$(n+1)(n+2)(2n+3) - n(n+1)(2n+1) = (n+1)[(n+2)(2n+3) - n(2n+1)]$$

— Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$ et $n(2n+1) = 2n^2 + n$, donc la différence des crochets vaut $6n + 6 = 6(n+1)$.

— Ainsi $(n+1)(n+2)(2n+3) = 6k + 6(n+1)^2$, qui est bien un multiple de 6.

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— Contrôle pour $n = 3$: $3 \times 4 \times 7 = 84 = 6 \times 14$. Correct.

— Remarque : ce produit vaut $6\sum_{k=1}^{n} k^2$, ce qui explique la divisibilité.

Réponse. Récurrence : la différence entre deux termes consécutifs vaut $6(n+1)^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).