Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : raisonner sur les ensembles et les entiers

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Tiroirs : $n+1$ objets dans n tiroirs, deux partagent un tiroir.

- **Récurrence forte**, **bon ordre**, **descente infinie** (plaquette 3).
- **Analyse-synthèse** : solution nécessaire, puis vérification.
- **Bijections** : deux ensembles finis en bijection ont même cardinal ; un ensemble est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
- **Limite** d'une suite :

$$u_n \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

- **Involution** : $f \circ f = \mathrm{id}$; une involution est une bijection, égale à sa réciproque.

Correction de l'exercice 1 – Une équation fonctionnelle par analyse-synthèse

a) $f(0)^2 - f(0) = 0$, donc $f(0)(f(0)-1) = 0$.

b) Avec $y = 0$: $f(x)f(0) - f(0) = x$. Si $f(0) = 0$, cela donne $0 = x$ pour tout x : faux pour $x = 1$.

c) Donc $f(0) = 1$, et la relation avec $y = 0$ devient $f(x) - 1 = x$:

$$f(x) = x + 1$$

d) Synthèse : $(x+1)(y+1) - (xy+1) = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y$ ✓ L'unique solution est $x \mapsto x + 1$.

Réponse. Unique solution $f(x) = x + 1$.

Correction de l'exercice 2 – Tiroirs et sommes divisibles

a) Les restes possibles sont alors $1, \ldots, n-1$: $n-1$ valeurs.

b) n nombres $S_1, \ldots, S_n$ pour $n-1$ restes (tiroirs) : deux ont le même reste, $S_i \equiv S_j$ avec $i < j$, et

$$S_j - S_i = a_{i+1} + \cdots + a_j \equiv 0\ [n]$$

c) Soit un S_k est divisible par n (bloc $a_1, \ldots, a_k$), soit b) fournit le bloc $a_{i+1}, \ldots, a_j$.

d) $S = 3, 4, 8, 9, 14$, restes $3, 4, 3, 4, 4$: $S_1 \equiv S_3$ donne $a_2 + a_3 = 1 + 4 = 5$ ✓

Réponse. Sommes partielles et tiroirs : un bloc consécutif de somme divisible par n ; exemple $1 + 4 = 5$.

Correction de l'exercice 3 – Puissances de 1 + √2

a) $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. $(a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}$ ✓

b) Récurrence : $1 - 0 = 1$ ✓, et

$$a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (a_n + 2b_n)^2 - 2(a_n + b_n)^2 = -(a_n^2 - 2b_n^2)$$

c) Si $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ avec $b \neq b'$, alors $\sqrt{2} = \frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{Q}$: absurde. Donc $b = b'$ puis

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$a = a'$.

d) $\left|\frac{a_n^2}{b_n^2} - 2\right| = \frac{1}{b_n^2} \to 0$ ($b_n \to +\infty$), donc $\frac{a_n}{b_n} \to \sqrt{2}$. Suite : $(1,1), (3,2), (7,5), (17,12), (41,29)$: $\frac{41}{29} \approx 1{,}41379$ ($\sqrt{2} \approx 1{,}41421$).

Réponse. $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$; $\frac{a_n}{b_n} \to \sqrt{2}$; $\frac{a_5}{b_5} = \frac{41}{29}$.

Correction de l'exercice 4 – Noyau d'une application

a) L'égalité dans F est réflexive, symétrique et transitive, donc $\sim$ aussi.

b) x^2 : la classe de x est $\{x, -x\}$ ($\{0\}$ pour $x = 0$). Modulo 3 : trois classes $3\mathbb{Z}$, $1 + 3\mathbb{Z}$, $2 + 3\mathbb{Z}$.

c) Bien définie : si $\overline{x} = \overline{y}$, alors $f(x) = f(y)$. Surjective : tout $f(x)$ est l'image de $\overline{x}$. Injective : $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{y}) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$.

$$E/\!\sim \;\simeq f(E)$$

d) Classes réduites à un point $\Leftrightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y) \Leftrightarrow f$ injective.

Réponse. Équivalence « même image » ; $E/\!\sim$ en bijection avec $f(E)$; classes singletons $\Leftrightarrow f$ injective.

Correction de l'exercice 5 – Limites supérieure et inférieure d'ensembles

a) $x \in \limsup A_n \Leftrightarrow \forall N, \exists n \geq N, x \in A_n$: x est dans **une infinité** de A_n.
$x \in \liminf A_n \Leftrightarrow \exists N, \forall n \geq N, x \in A_n$: x est dans tous les A_n **à partir d'un certain rang**.

b) « À partir d'un rang » entraîne « une infinité de fois » (c'est « $\exists N \forall n$ » contre « $\forall N \exists n$ »).

c) x est dans une infinité de A_n ssi $x \in A \cup B$; dans tous à partir d'un rang ssi $x \in A \cap B$:

$$\limsup A_n = A \cup B, \qquad \liminf A_n = A \cap B$$

d) Pour n pair $A_n = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right]$, pour n impair $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. $x \in [0,1[$ est dans tous les A_n pour n grand ; $x = 1$ n'est que dans les pairs ; $x > 1$ dans un nombre fini. liminf $= [0,1[$, limsup $= [0,1]$.

Réponse. limsup : infiniment souvent ; liminf : à partir d'un rang ; alternance : $A \cup B$ et $A \cap B$; d) $[0,1]$ et $[0,1[$.

Correction de l'exercice 6 – Involutions

a) $f \circ f = \mathrm{id}$ montre que f admet f comme inverse à gauche et à droite : bijective, $f^{-1} = f$.

b) $x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; $A \mapsto \overline{A}$ sur $P(E)$.

c) Si $f(n) = n$, f induit une involution de $\{1, \ldots, n-1\}$: I_{n-1} possibilités. Sinon $f(n) = k \neq n$ ($n - 1$ choix), et alors $f(k) = n$; f induit une involution des $n - 2$ autres éléments :

$$I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$$

d) $I_1 = 1$, $I_2 = 2$ (id et l'échange), $I_3 = 2 + 2 = 4$, $I_4 = 4 + 3 \times 2 = 10$, $I_5 = 10 + 4 \times 4 = 26$.

Réponse. Involution = bijection égale à sa réciproque ; $I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$: $1, 2, 4, 10, 26$.

Correction de l'exercice 7 – Théorème de Cesàro

a) $\frac{1}{n}\sum (u_k - \ell) = \frac{1}{n}\sum u_k - \ell$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On coupe la somme en $k \le N$ et $k > N$:

$$|v_n - \ell| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} \varepsilon \le \frac{C}{n} + \varepsilon$$

c) Soit $\varepsilon > 0$; N et C étant fixés par b), il existe $N' \ge N$ avec $\frac{C}{n} \le \varepsilon$ pour $n \ge N'$. Alors $|v_n - \ell| \le 2\varepsilon$ pour $n \ge N'$: $v_n \to \ell$ (quitte à remplacer ε par $\frac{\varepsilon}{2}$).

d) $u_n = (-1)^n$ diverge, mais $|v_n| \le \frac{1}{n} \to 0$ (les termes se compensent deux à deux) : v_n converge vers 0.

Réponse. $|v_n - \ell| \le \frac{C}{n} + \varepsilon$, donc $v_n \to \ell$; réciproque fausse avec $(-1)^n$.

Correction de l'exercice 8 – Parties de cardinal pair

a) $(A \Delta \{x_0\}) \Delta \{x_0\} = A$ (Δ associative, $\{x_0\} \Delta \{x_0\} = \varnothing$). On ajoute x_0 s'il est absent, on l'enlève s'il est présent : le cardinal varie de ± 1.

b) L'involution est une bijection entre parties paires et parties impaires ; leur total est 2^n, donc 2^{n-1} chacune.

c) $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k}$, soit

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$$

d) $n = 3$, $E = \{1,2,3\}$: pairs $\varnothing$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$; impairs $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2,3\}$: $4 = 2^2$ de chaque ✓

Réponse. Bijection $A \mapsto A \Delta \{x_0\}$: 2^{n-1} parties paires et impaires ; $\sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Correction de l'exercice 9 – Théorème de Zeckendorf (existence)

a) 1, 2, 3, $4 = 3 + 1$, 5, $6 = 5 + 1$, $7 = 5 + 2$, 8, $9 = 8 + 1$, $10 = 8 + 2$, $11 = 8 + 3$, $12 = 8 + 3 + 1$.

b) Si n est un F_k, c'est fini. Sinon, soit F_k le plus grand terme $\le n$: $F_k < n < F_{k+1}$, et $1 \le n - F_k < n$; par hypothèse forte, $n - F_k$ s'écrit comme somme de termes distincts non consécutifs.

c) $n < F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ donne

$$n - F_k < F_{k-1}$$

— donc l'écriture de $n - F_k$ n'utilise que des termes $\le F_{k-2}$: ajouter F_k ne crée ni doublon ni consécutivité.

d) $100 = 89 + 11 = 89 + 8 + 3$; $2026 = 1597 + 429$, $429 = 377 + 52$, $52 = 34 + 18$, $18 = 13 + 5$: $2026 = 1597 + 377 + 34 + 13 + 5$.

Réponse. Algorithme glouton + récurrence forte ; $100 = 89 + 8 + 3$; $2026 = 1597 + 377 + 34 + 13 + 5$.

Correction de l'exercice 10 – Six personnes et trois amis

a) Les 5 autres personnes se répartissent en deux tiroirs (« connues de A », « inconnues de A ») : l'un contient au moins $\lceil 5/2 \rceil = 3$ personnes.

b) Si deux d'entre B, C, D se connaissent, avec A elles forment 3 personnes se connaissant deux à deux. Sinon, B, C, D ne se connaissent pas deux à deux.

c) Dans les deux sous-cas on obtient le triangle voulu ; le cas « A ne connaît pas 3

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

personnes » s'échange avec le précédent en inversant les rôles. En termes de graphes :

$$R(3,3) \leq 6$$

d) 5 personnes en cercle, chacune connaissant ses deux voisins : trois personnes parmi cinq contiennent toujours deux non-voisins (pas de triangle d'amis) et deux voisins (pas de triangle d'inconnus). Donc $R(3,3) = 6$.

Réponse. Tiroirs puis disjonction de cas : triangle d'amis ou d'inconnus parmi 6 ; faux pour 5 (pentagone).

Correction de l'exercice 11 – L'ordre lexicographique

a) Réflexivité et transitivité se vérifient cas par cas ; antisymétrie : si $(a,b) \leq (c,d) \leq (a,b)$, alors $a \leq c \leq a$, $a = c$, puis $b = d$. Totalité : si $a \neq c$ on compare a et c, sinon b et d.

b) Soit $X \neq \emptyset$. $a_0 = \min\{a : \exists b,\ (a,b) \in X\}$ existe (bon ordre de $\mathbb{N}$), puis $b_0 = \min\{b : (a_0,b) \in X\}$. Alors (a_0,b_0) est le plus petit élément de X.

c) Non : ses termes formeraient une partie sans plus petit élément, contradiction avec b). On peut donc faire des **récurrences** (ou des preuves de terminaison) selon cet ordre.

d) Tous les $(0,b)$, $b \in \mathbb{N}$:

$$(0,0) < (0,1) < (0,2) < \cdots < (1,0)$$

— Contrairement à $\mathbb{N}$, un élément peut avoir une infinité de prédécesseurs, mais toute suite strictement décroissante reste finie.

Réponse. Ordre total et bon ordre sur $\mathbb{N}^2$; pas de suite strictement décroissante infinie ; $(1,0)$ a pour prédécesseurs tous les $(0,b)$.

Correction de l'exercice 12 – Q est dénombrable

a) Existence : on simplifie par le pgcd et on met le signe au numérateur. Unicité : si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ irréductibles, $pq' = p'q$; $q \mid pq'$ et q premier avec p, donc $q \mid q'$ (Gauss) ; de même $q' \mid q$, d'où $q = q'$ et $p = p'$.

b) $\frac{p}{q} \mapsto (p,q)$ (forme irréductible) est injective par a).

c) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g(p) = 2p$ si $p \geq 0$, $-2p-1$ sinon, est bijective. Puis

$$(p,q) \mapsto 2^{g(p)}3^q$$

— est injective par unicité de la décomposition en facteurs premiers.

d) $\mathbb{Q}$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ et est infini : il est en bijection avec une partie infinie de $\mathbb{N}$, donc avec $\mathbb{N}$. Au contraire $P(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable (Cantor, plaquette 4) : il y a « strictement plus » de parties de $\mathbb{N}$ que de rationnels.

Réponse. Forme irréductible unique ; injection $\frac{p}{q} \mapsto 2^{g(p)}3^q$; $\mathbb{Q}$ dénombrable, $P(\mathbb{N})$ non.

Correction de l'exercice 13 – Quatre caractérisations de l'inclusion

a) $B \subset A \cup B$ toujours ; si $x \in A \cup B$, alors $x \in B$ (directement ou via $A \subset B$). Donc $A \cup B = B$.

b) $A \cap B \subset A$ toujours ; si $x \in A$, alors $x \in A \cup B = B$, donc $x \in A \cap B$.

c) $A \cap \overline{B} = (A \cap B) \cap \overline{B} = A \cap (B \cap \overline{B}) = \emptyset$. Puis, si $x \in A$ et $x \notin B$, on aurait $x \in A \cap \overline{B} = \emptyset$: impossible, donc $x \in B$.

d) $1_A(1 - 1_B) = 0$, soit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$1_A = 1_A 1_B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$$

— (ce qui est bien $A \subset B$).

Réponse. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$; $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$.

Correction de l'exercice 14 – Récurrence et inégalité arithmético-géométrique

a) $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$.

b) Pour 2^{k+1} termes, on applique l'hypothèse à chaque moitié, puis le cas $n = 2$ aux deux moyennes :

$$\sqrt[2^{k+1}]{\prod x_i} = \sqrt{G_1 G_2} \leq \frac{G_1 + G_2}{2} \leq \frac{A_1 + A_2}{2} = A$$

— (G_i, A_i : moyennes géométrique et arithmétique de chaque moitié).

c) Avec $N = 2^k$ termes ($x_1, \ldots, x_n$ et $N - n$ fois m), la moyenne arithmétique vaut encore m, donc $x_1 \cdots x_n \, m^{N-n} \leq m^N$, soit $x_1 \cdots x_n \leq m^n$.

d) Avec $x_i = i$: $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}$. Contrôle $n = 4$: $24 \leq 2{,}5^4 \approx 39$ ✓

Réponse. Cas 2 par $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, récurrence sur 2^k, puis descente ; $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une bijection de [0, 1] sur [0, 1[

a) $f(1) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

b) 1 n'est l'image de rien : $f(1) = \frac{1}{2}$, les $\frac{1}{n}$ vont sur des $\frac{1}{n+1} < 1$, et les autres points (différents de 1) sont fixes.

c) $g : [0, 1[\to [0, 1]$, $g\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$, $g(y) = y$ sinon. Alors $g \circ f = \mathrm{id}$ et $f \circ g = \mathrm{id}$ (cas par cas) :

$$1 \mapsto \frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{3} \mapsto \frac{1}{4} \mapsto \cdots$$

d) On « décale d'un cran » la suite $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ pour libérer la place de 1, comme on loge un nouveau client dans un hôtel infini complet. Une bijection continue strictement monotone de $[0, 1]$ serait d'image un **segment** $[f(0), f(1)]$ ou $[f(1), f(0)]$, fermé, et ne pourrait pas être $[0, 1[$.

Réponse. f décale $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n+1}$ et fixe le reste : bijection $[0, 1] \to [0, 1[$, non continue-monotone.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).