Plaquette 4 – Ensembles, applications et relations

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On manipule les opérations sur les ensembles (réunions et intersections indexées, différence symétrique, parties, produit cartésien), les **applications** (images directes et réciproques, injectivité, surjectivité, composition, réciproque) et les **relations** (équivalence, ordre). Pour prouver une égalité d'ensembles : double inclusion ou chaîne d'équivalences ; pour une propriété d'application : revenir aux définitions quantifiées ; pour réfuter : un contre-exemple explicite et vérifié.

Exercice 1 – Réunions et intersections indexées

Déterminer, en justifiant par double inclusion :

a) $\bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.

b) $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.

d) Montrer qu'une intersection d'intervalles ouverts n'est pas toujours ouverte, et qu'une réunion de fermés n'est pas toujours fermée.

Exercice 2 – Différence symétrique

Pour $A, B \subset E$, on pose $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

a) Montrer que $1_{A \Delta B} = |1_A - 1_B| = 1_A + 1_B - 2 1_A 1_B$.

b) En déduire que Δ est associative.

c) Montrer que $A \,\Delta\, B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

d) Résoudre l'équation $A \,\Delta\, X = B$ d'inconnue $X \subset E$.

Exercice 3 – Images directes et réciproques

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

a) Déterminer $f([-1, 2])$, $f^{-1}([1, 4])$ et $f^{-1}([-4, -1])$.

b) Soient $A = [-2, 0]$ et $B = [0, 2]$: comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

c) Montrer que pour toute application, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, avec égalité si f est injective.

d) Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ toujours.

Exercice 4 – Injective sans être surjective, et inversement

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

a) Montrer que f est injective mais pas surjective.

b) Montrer que g est surjective mais pas injective.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

d) Pourquoi ce phénomène est-il impossible pour des applications d'un ensemble **fini** dans lui-même ?

Exercice 5 – Composition et injectivité

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

a) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

c) Montrer par un exemple que $g \circ f$ injective n'entraîne pas g injective.

d) Montrer que si f et g sont bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 6 – Une bijection de R sur]−1, 1[

Soit $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

a) Vérifier que f est à valeurs dans $]-1, 1[$ et qu'elle est impaire.

b) Résoudre $f(x) = y$ pour $y \in [0, 1[$, puis pour $y \in]-1, 0[$.

c) En déduire que f est bijective et donner $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.

d) Vérifier $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ en $y = \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{3}{4}$.

Exercice 7 – Une bijection de N² sur N

Soit $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(p, q) \mapsto 2^p(2q+1) - 1$.

a) Calculer $\varphi(0,0)$, $\varphi(1,0)$, $\varphi(0,1)$, $\varphi(2,3)$.

b) Montrer que φ est injective (utiliser l'unicité de l'écriture $m = 2^p k$ avec k impair).

c) Montrer que φ est surjective.

d) Trouver l'antécédent de 95. Quelle conséquence sur les cardinaux de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$?

Exercice 8 – Une relation d'équivalence sur R

On définit sur $\mathbb{R}$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b) Décrire la classe de $\frac{1}{3}$ et celle de 0.

c) Montrer que chaque classe contient un unique élément de $[0, 1[$; lequel pour la classe de x ?

d) Même question pour la congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$: combien de classes ?

Exercice 9 – L'ordre de divisibilité

Sur $\mathbb{N}^*$, on note $a \preccurlyeq b$ si $a \mid b$.

a) Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

b) Dans $E = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, déterminer les éléments minimaux, maximaux, et s'ils

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

existent le plus petit et le plus grand élément.

c) Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de $\{4, 6\}$ pour cet ordre.

d) Que devient l'antisymétrie sur $\mathbb{Z}^*$?

Exercice 10 – Calculer avec les indicatrices

Soient A, B, C des parties de E.

a) Justifier les formules de la boîte à outils pour $1_{A\cap B}$, $1_{\overline{A}}$, $1_{A\cup B}$.

b) Démontrer $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ par un calcul d'indicatrices.

c) Démontrer $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ de même.

d) En déduire la formule du crible pour $|A\cup B\cup C|$ quand E est fini (sommer les indicatrices).

Exercice 11 – Théorème de Cantor

Soit E un ensemble et $f : E \to P(E)$ une application quelconque. On pose $D = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$.

a) Supposer qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = D$ et examiner les cas $a \in D$ et $a \notin D$.

b) En déduire qu'aucune application $E \to P(E)$ n'est surjective.

c) Illustrer avec $E = \{1, 2\}$ et $f(1) = \{1\}$, $f(2) = \{1, 2\}$: calculer D.

d) Comparer $|E|$ et $|P(E)|$ pour E fini, et commenter pour $E = \mathbb{N}$.

Exercice 12 – Relations d'équivalence sur un ensemble à trois éléments

Soit $E = \{a, b, c\}$.

a) Montrer que les classes d'une relation d'équivalence forment une partition de E (parties non vides, disjointes, de réunion E).

b) Réciproquement, montrer qu'une partition définit une relation d'équivalence (« être dans la même partie »).

c) En déduire le nombre de relations d'équivalence sur E en listant les partitions.

d) Combien y a-t-il de relations binaires sur E ? Quelle proportion sont des équivalences ?

Exercice 13 – Compter injections et surjections

a) Montrer que s'il existe une injection d'un ensemble fini E dans F, alors $|E| \le |F|$.

b) Combien y a-t-il d'injections de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, \dots, 5\}$? Et d'applications ?

c) Combien y a-t-il de surjections de $\{1, 2, 3, 4\}$ sur $\{1, 2\}$?

d) Montrer qu'il n'existe pas d'injection de $\{1, \dots, 6\}$ dans $\{1, \dots, 5\}$ et interpréter comme un principe des tiroirs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Produit cartésien et parties

Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$.

a) Écrire $A \times B$ et $B \times A$; sont-ils égaux ? Ont-ils le même cardinal ?

b) Écrire $P(A)$ et $P(P(A))$; donner leurs cardinaux.

c) Montrer que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

d) A-t-on $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$? Contre-exemple.

Exercice 15 – Synthèse : images, images réciproques et bijectivité

Soit $f : E \to F$.

a) Montrer que pour tout $A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$, et que pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) Montrer que f est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour tout $A \subset E$.

c) Montrer que f est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(B)) = B$ pour tout $B \subset F$.

d) Illustrer avec $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, $B = [-1, 1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).