Plaquette 2 – Logique : quantificateurs, négations et implications

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

En prépa, toute définition d'analyse (limite, continuité, borne, suite de Cauchy) est une phrase **quantifiée**. Savoir l'écrire, l'**ordonner** correctement et la **nier** mécaniquement est la compétence de base : c'est elle qui permet de démontrer qu'une propriété est fausse en exhibant un contre-exemple précis. On traduit chaque énoncé, on nie en échangeant $\forall$ et $\exists$, et on vérifie la négation sur un exemple.

Exercice 1 – Limite d'une suite : écrire et nier

Soit (u_n) une suite réelle.

a) Écrire avec des quantificateurs « (u_n) converge vers ℓ », puis « (u_n) converge ».

b) Écrire la négation de « (u_n) converge vers ℓ ».

c) Montrer que $u_n = (-1)^n$ ne converge pas vers 1 (exhiber le ε de la négation).

d) Écrire « (u_n) tend vers $+\infty$ » et sa négation ; montrer que $u_n = n(1 + (-1)^n)$ ne tend pas vers $+\infty$.

Exercice 2 – Continuité et continuité uniforme

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

a) Écrire « f est continue sur I » et « f est uniformément continue sur I ». Quelle est la seule différence ?

b) Montrer que l'uniforme continuité entraîne la continuité.

c) Écrire la négation de l'uniforme continuité.

d) Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (prendre $\varepsilon = 1$, $x = n$, $y = n + \frac{1}{n}$).

Exercice 3 – L'ordre des quantificateurs

Dire si chaque proposition est vraie ou fausse, en justifiant.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m < n$ et $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq n$.

c) $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$ et $\exists y > 0, \forall x > 0, y < x$.

d) Montrer en général que $\exists y, \forall x, P(x, y)$ implique $\forall x, \exists y, P(x, y)$.

Exercice 4 – Fonctions majorées, bornées, monotones

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Écrire « f est majorée », « f est bornée » et leurs négations.

b) Montrer que $f(x) = x \sin x$ n'est pas bornée.

c) Écrire « f est croissante » et « f n'est pas monotone ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ en exhibant des points.

Exercice 5 – Tables de vérité et implications

a) Dresser la table de vérité de $P \Rightarrow Q$ et vérifier qu'elle coïncide avec celle de $(\text{non}\, P)$ ou Q.

b) Montrer que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ équivaut à $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.

c) Montrer par un choix de valeurs que $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ n'équivaut pas à $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

d) En déduire que « $\Rightarrow$ » n'est pas associative, et la négation de $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

Exercice 6 – Conditions nécessaires, suffisantes

Pour chaque couple, dire si P est nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante (ou rien) pour Q (x réel, n entier).

a) P : « $x = 2$ » ; Q : « $x^2 = 4$ ».

b) P : « $4 \mid n$ » ; Q : « n est pair ».

c) P : « $|x| < 1$ » ; Q : « $x^2 < 1$ ».

d) P : « $x > 0$ » ; Q : « $x^2 > x$ ». Justifier chaque réponse (contre-exemple pour chaque implication fausse).

Exercice 7 – Raisonner par disjonction de cas

a) En distinguant les restes de n modulo 3, montrer que n^2 a pour reste 0 ou 1 modulo 3.

b) En déduire que $n^2 + 1$ n'est jamais divisible par 3, et que $3 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow 3 \mid a$ et $3 \mid b$.

c) Montrer que $6 \mid n^3 - n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que pour tout réel x, $|x - 1| + |x + 1| \geq 2$, avec égalité si et seulement si $x \in [-1, 1]$ (trois cas).

Exercice 8 – Contraposée

a) Montrer par contraposée : si n^2 est pair, alors n est pair.

b) Montrer par contraposée : si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair (on montrera que n impair implique $8 \mid n^2 - 1$).

c) Montrer : si $x \neq -1$, alors $\dfrac{x}{x+1} \neq 1$. Quelle est la contraposée ?

d) Distinguer contraposée et réciproque sur l'exemple a) : la réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9 – Deux raisonnements par l'absurde

a) Montrer que $\log_2 3$ est irrationnel (supposer $\log_2 3 = \frac{p}{q}$).

b) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers (supposer qu'ils sont en nombre fini $p_1, \ldots, p_r$ et considérer $N = p_1 \cdots p_r + 1$).

c) Montrer que pour tout réel x, si $x > 0$ alors $x + \frac{1}{x} \geq 2$, par l'absurde.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Dans b), N est-il forcément premier ? Tester avec $2, 3, 5, 7, 11, 13$.

Exercice 10 – Équivalences en cycle

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les trois propositions sont équivalentes en établissant $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$:

(i) $a = 0$; (ii) $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$; (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a| < \frac{1}{n}$.

a) Démontrer $(i) \Rightarrow (ii)$.

b) Démontrer $(ii) \Rightarrow (iii)$ (attention à l'inégalité stricte).

c) Démontrer $(iii) \Rightarrow (i)$ par l'absurde (propriété d'Archimède).

d) Pourquoi une chaîne circulaire suffit-elle pour trois équivalences ?

Exercice 11 – Existence et unicité

a) Écrire avec des quantificateurs « l'équation $x^3 + x = 1$ a une unique solution réelle ».

b) Démontrer l'existence (théorème des valeurs intermédiaires).

c) Démontrer l'unicité de deux façons : par stricte monotonie, puis directement en supposant deux solutions x et x'.

d) Situer la solution à 10^{-1} près.

Exercice 12 – Traduire des énoncés célèbres

Traduire avec des quantificateurs, puis nier :

a) « Tout entier pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers » (conjecture de Goldbach ; on note P l'ensemble des premiers).

b) « La suite (u_n) est stationnaire » (constante à partir d'un certain rang).

c) « $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique ».

d) Que faudrait-il exhiber pour réfuter la conjecture de Goldbach ?

Exercice 13 – Vrai ou faux : quantificateurs dans R

Dire si chaque proposition est vraie ou fausse ; démontrer, ou démontrer la négation.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x$.

b) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y^2 = x$.

c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in \mathbb{Q},\ |x - q| < \varepsilon$.

Exercice 14 – Nier une définition à trois quantificateurs

Une suite (u_n) est dite **bornée à partir d'un certain rang** si $\exists M \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n| \leq M$.

a) Montrer qu'une suite réelle est bornée si et seulement si elle est bornée à partir d'un certain rang.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Écrire la négation de « (u_n) est bornée ».

c) Montrer que $u_n = n\cos(n\pi)$ n'est pas bornée.

d) Montrer qu'une suite convergente est bornée (utiliser a) avec $\varepsilon = 1$).

Exercice 15 – Synthèse : suites de Cauchy

Une suite est **de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \geq N,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

a) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

b) Écrire la négation de « (u_n) est de Cauchy ».

c) Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

d) En déduire que (H_n) n'est pas de Cauchy, donc diverge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).