Plaquette 3 – Modes de raisonnement : récurrences, absurde, analyse-synthèse

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Chaque type d'énoncé appelle un raisonnement : une propriété indexée par n se démontre par **récurrence** (simple, double ou forte, selon le nombre de rangs précédents utilisés) ; l'impossibilité d'une situation par l'**absurde** ou la **descente infinie** ; la recherche de toutes les solutions d'un problème par **analyse-synthèse**. La rédaction doit rendre visible la structure : hypothèse de récurrence clairement énoncée, contradiction explicitement identifiée, synthèse qui vérifie vraiment.

Exercice 1 – Récurrence double

Soit $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

a) Calculer u_2, u_3, u_4 et conjecturer une formule.

b) Démontrer la formule $u_n = 2^n + 1$ par récurrence double.

c) Pourquoi une récurrence simple ne suffit-elle pas ici ?

d) Retrouver la formule par l'équation caractéristique $r^2 = 3r - 2$.

Exercice 2 – Récurrence forte : écriture en base 2

Montrer que tout entier $n \geq 1$ s'écrit comme somme de puissances de 2 **distinctes**.

a) Traiter $n = 1, 2, 3$.

b) Hérédité forte : supposer le résultat pour tous les entiers de 1 à n. Si $n+1$ est pair, utiliser $\frac{n+1}{2}$; s'il est impair, utiliser n.

c) Pourquoi les puissances restent-elles distinctes dans chaque cas ?

d) Écrire 45 selon cette construction.

Exercice 3 – Inégalité de Bernoulli

a) Montrer par récurrence que pour tout $x \geq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

b) Où l'hypothèse $x \geq -1$ intervient-elle ? Donner un contre-exemple si $x < -1$.

c) En déduire que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ pour $n \geq 1$.

d) En déduire que $a^n \to +\infty$ si $a > 1$ (poser $a = 1 + x$).

Exercice 4 – Où est l'erreur ?

On « démontre » que tous les chevaux ont la même couleur. $P(n)$: « dans tout groupe de n chevaux, tous ont la même couleur ». $P(1)$ est vraie. Hérédité : dans un groupe de $n+1$ chevaux, les n premiers ont la même couleur, les n derniers aussi ; les deux groupes ayant des chevaux en commun, tous ont la même couleur.

a) Tester l'argument de l'hérédité pour $n = 1$ (passage de 1 à 2 chevaux).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Identifier précisément l'implication fausse.

c) Pour quels n l'hérédité est-elle correcte ? Pourquoi cela ne sauve-t-il pas la « preuve » ?

d) Quelle leçon en tirer pour rédiger une hérédité ?

Exercice 5 – Somme des cubes

a) Démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ et vérifier pour $n = 4$.

c) Calculer $\sum_{k=11}^{20} k^3$.

d) Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6 – Descente infinie

On montre que l'équation $x^2 = 2y^2$ n'a pas de solution en entiers naturels non nuls.

a) Supposer qu'il existe une solution et choisir celle pour laquelle x est **minimal** (principe du bon ordre).

b) Montrer que x est pair, puis que y est pair.

c) En déduire une solution plus petite et conclure.

d) Quelle conséquence sur $\sqrt{2}$?

Exercice 7 – Principe du bon ordre et diviseurs premiers

a) Soit $n \geq 2$. Montrer que le plus petit diviseur $d \geq 2$ de n existe et qu'il est premier.

b) Montrer que si n n'est pas premier, ce plus petit diviseur vérifie $d \leq \sqrt{n}$.

c) En déduire un test de primalité et l'appliquer à $n = 221$.

d) Montrer que le principe du bon ordre implique le principe de récurrence (considérer l'ensemble des n tels que $P(n)$ est fausse).

Exercice 8 – Analyse-synthèse : une équation fonctionnelle

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) + 2f(1-x) = x$ pour tout x.

a) **Analyse** : écrire la relation en $1 - x$ et en déduire $f(x)$.

b) **Synthèse** : vérifier que la fonction trouvée convient.

c) Conclure (existence et unicité).

d) Même question pour $f(x) + f(1-x) = x$: que se passe-t-il ?

Exercice 9 – Fonctions additives sur Q

Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$. On pose $a = f(1)$.

a) Montrer que $f(0) = 0$ et $f(-x) = -f(x)$.

b) Montrer par récurrence que $f(nx) = nf(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire que $f\left(\frac{p}{q}\right) = a\frac{p}{q}$ pour $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

d) Conclure par analyse-synthèse : quelles sont toutes les solutions ?

Exercice 10 – Racines rationnelles et absurde

a) Soit $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(p, q) = 1$) une racine de $x^3 + x + 1$. Montrer que $p \mid 1$ et $q \mid 1$.

b) En déduire que $x^3 + x + 1$ n'a pas de racine rationnelle.

c) Montrer pourtant qu'il a une racine réelle, et la situer entre deux entiers consécutifs.

d) Généraliser : que dire des racines rationnelles d'un polynôme unitaire à coefficients entiers ?

Exercice 11 – Récurrences sur des produits

a) Montrer que $\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$ (par télescopage, puis par récurrence).

b) Montrer que $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

c) Montrer que $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ pour $n \geq 2$.

d) En déduire la limite de ce produit.

Exercice 12 – Récurrence et divisibilité

a) Montrer par récurrence que $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Retrouver le résultat avec les congruences ($9 \equiv 2\ [7]$).

c) Montrer par récurrence que $64 \mid 9^n - 8n - 1$.

d) Contrôler b) et c) pour $n = 2$.

Exercice 13 – Fibonacci : identités par récurrence

Soit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

a) Montrer par récurrence l'identité de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ ($n \geq 1$).

b) En déduire que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

c) Montrer par récurrence double que $F_n \leq \varphi^{n-1}$ pour $n \geq 1$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vérifie $\varphi^2 = \varphi + 1$.

d) Vérifier c) pour $n = 10$ ($F_{10} = 55$, $\varphi^9 \approx 76$).

Exercice 14 – Triplets pythagoriciens et parité

Soient a, b, c des entiers tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Déterminer les restes possibles d'un carré modulo 4.

b) Montrer par l'absurde que a et b ne sont pas tous deux impairs.

c) Montrer de même que l'un des trois nombres est divisible par 3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Vérifier sur $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ et $(8, 15, 17)$.

Exercice 15 – Synthèse : le problème des pièces de 3 et 5

On dispose de pièces de 3 et de 5 euros en quantité illimitée.

a) Quelles sommes entre 1 et 7 peut-on payer exactement ?

b) Montrer par récurrence forte que toute somme $n \geq 8$ est payable : initialiser à 8, 9, 10, puis utiliser $n + 1 = (n - 2) + 3$.

c) Pourquoi faut-il **trois** initialisations ?

d) Généraliser (sans preuve) : pour des pièces de a et b premiers entre eux, la plus grande somme impayable est $ab - a - b$. Vérifier ici.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).