Plaquette 1 – Quantificateurs, modes de raisonnement et ensembles

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On écrit et on nie des propositions quantifiées, on choisit le bon **mode de raisonnement** (direct, contraposée, absurde, récurrence, analyse-synthèse), et on démontre des égalités ensemblistes par double inclusion. La rédaction doit être irréprochable : chaque quantificateur compte.

Exercice 1 – Traduire avec des quantificateurs

Écrire avec des quantificateurs :

a) « Tout réel admet un carré positif. »

b) « Il existe un entier naturel supérieur à 10^6. »

c) « La fonction f s'annule au moins une fois sur $[0\,;1]$. »

Exercice 2 – Ordre des quantificateurs

Comparer les deux propositions suivantes et dire lesquelles sont vraies.

— P : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$

— Q : $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x$

Exercice 3 – Nier une proposition

Écrire la négation de :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$

b) $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$

c) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$

Exercice 4 – Contraposée

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par contraposée : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 5 – Raisonnement par l'absurde

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 6 – Récurrence simple

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Récurrence avec inégalité

Démontrer que pour tout $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Exercice 8 – Analyse-synthèse

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction **paire** et d'une fonction **impaire**.

Exercice 9 – Inclusion d'ensembles

Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \,;\, n \text{ est multiple de } 6\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \,;\, n \text{ est pair}\}$.

a) Montrer que $A \subset B$.

b) A-t-on $B \subset A$?

Exercice 10 – Double inclusion

Démontrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 11 – Lois de De Morgan

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 12 – Contre-exemple

Réfuter les affirmations suivantes.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > x$

b) Pour tous ensembles A, B, C : $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

Exercice 13 – Récurrence forte : décomposition en nombres premiers

On veut démontrer que tout entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers.

a) Expliquer pourquoi une récurrence simple ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$) ne suffit pas.

b) Rédiger une récurrence **forte** : on suppose la propriété vraie pour tous les entiers k tels que $2 \leq k \leq n$, et on la démontre pour $n+1$.

c) Appliquer la démarche à $n + 1 = 360$ en suivant la construction de la preuve.

d) Pourquoi l'initialisation à $n = 2$ suffit-elle ?

Exercice 14 – Principe des tiroirs

Principe des tiroirs : si l'on range $n + 1$ objets dans n tiroirs, un tiroir contient au moins deux objets.

a) Le démontrer par l'absurde.

b) Montrer que parmi $n + 1$ entiers choisis dans $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, deux sont consécutifs, donc premiers entre eux. (Tiroirs : $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, ...)

c) Montrer que parmi 5 points d'un carré de côté 2, deux sont à distance au plus $\sqrt{2}$.

d) Montrer que le résultat de b) devient faux avec seulement n entiers.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : raisonnement complet

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6, en utilisant une récurrence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).