Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : raisonner sur les ensembles et les entiers

Raisonnement et ensembles — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Ces problèmes mêlent les outils du chapitre : quantificateurs pour écrire une définition, récurrence (simple ou forte) pour une propriété indexée, principe des tiroirs ou absurde pour une existence non constructive, analyse-synthèse pour une équation, bijections pour compter ou comparer des ensembles. Avant de rédiger, on identifie **le bon mode de raisonnement** ; après, on contrôle sur un petit cas.

Exercice 1 – Une équation fonctionnelle par analyse-synthèse

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

a) Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$ (prendre $x = y = 0$).

b) Montrer que $f(0) = 0$ est impossible (prendre $y = 0$).

c) En déduire $f(x)$ pour tout x.

d) Conclure par la synthèse.

Exercice 2 – Tiroirs et sommes divisibles

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers ($n \geq 1$).

a) On pose $S_k = a_1 + \cdots + a_k$ ($1 \leq k \leq n$). Si aucun S_k n'est divisible par n, combien de restes possibles pour les S_k modulo n ?

b) En déduire qu'il existe des indices $i < j$ avec $n \mid S_j - S_i$.

c) Conclure : il existe toujours une suite de termes **consécutifs** dont la somme est divisible par n.

d) Application : $n = 5$, $(a_i) = (3, 1, 4, 1, 5)$; trouver un tel bloc.

Exercice 3 – Puissances de 1 + √2

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe des entiers a_n, b_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, avec $a_{n+1} = a_n + 2b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$.

b) Montrer que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

c) Montrer que a_n et b_n sont uniques (utiliser $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

d) En déduire que $\frac{a_n}{b_n} \to \sqrt{2}$ et calculer $\frac{a_5}{b_5}$.

Exercice 4 – Noyau d'une application

Soit $f : E \to F$. On définit sur E : $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b) Décrire ses classes pour $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$, et pour $f(n) = n \bmod 3$ sur $\mathbb{Z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que l'application $\bar{f} : E/\sim \to f(E)$, $\overline{x} \mapsto f(x)$ est bien définie et bijective.

d) À quelle condition sur f les classes sont-elles toutes des singletons ?

Exercice 5 – Limites supérieure et inférieure d'ensembles

Pour une suite (A_n) de parties de E, on pose $\limsup A_n = \bigcap_N \bigcup_{n \geq N} A_n$ et $\liminf A_n = \bigcup_N \bigcap_{n \geq N} A_n$.

a) Traduire $x \in \limsup A_n$ et $x \in \liminf A_n$ en français (« une infinité de n », « à partir d'un certain rang »).

b) Montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

c) Calculer les deux ensembles lorsque $A_{2k} = A$ et $A_{2k+1} = B$.

d) Calculer les deux pour $A_n = \left[0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$ $(n \geq 1)$.

Exercice 6 – Involutions

Une involution de E est une application $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

a) Montrer qu'une involution est bijective et que $f^{-1} = f$.

b) Donner trois exemples : sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^*$, sur $P(E)$.

c) Soit I_n le nombre d'involutions de $\{1, \dots, n\}$. Montrer que $I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$ (selon que n est fixe ou échangé avec un autre élément).

d) Calculer $I_1, \dots, I_5$.

Exercice 7 – Théorème de Cesàro

Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ et $v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

a) Écrire $v_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$ pour $k > N$. Montrer que $|v_n - \ell| \leq \frac{C}{n} + \varepsilon$ avec $C = \sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell|$.

c) En déduire que $v_n \to \ell$ (rédiger avec les quantificateurs).

d) Montrer que la réciproque est fausse ($u_n = (-1)^n$).

Exercice 8 – Parties de cardinal pair

Soit E un ensemble à $n \geq 1$ éléments et $x_0 \in E$ fixé.

a) Montrer que $A \mapsto A \,\Delta\, \{x_0\}$ est une involution de $P(E)$ qui change la parité du cardinal.

b) En déduire qu'il y a autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair, soit 2^{n-1} de chaque.

c) En déduire l'identité $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ et la retrouver par le binôme.

d) Vérifier pour $n = 3$ en listant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Théorème de Zeckendorf (existence)

Soit (F_n) la suite de Fibonacci $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ ($F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$).

a) Écrire $1, \ldots, 12$ comme somme de termes **distincts et non consécutifs** de cette suite.

b) Démontrer par récurrence forte que tout $n \geq 1$ admet une telle écriture : prendre le plus grand $F_k \leq n$ et appliquer l'hypothèse à $n - F_k$.

c) Pourquoi $n - F_k < F_{k-1}$, et pourquoi cela garantit-il la non-consécutivité ?

d) Écrire 100 et 2026.

Exercice 10 – Six personnes et trois amis

Parmi 6 personnes, deux quelconques se connaissent ou non. On veut montrer qu'il existe 3 personnes qui se connaissent deux à deux, ou 3 qui ne se connaissent pas deux à deux.

a) Soit A l'une des personnes. Montrer (tiroirs) que A connaît au moins 3 personnes, ou ne connaît pas au moins 3 personnes.

b) Traiter le premier cas : parmi 3 connaissances B, C, D de A, examiner si deux d'entre elles se connaissent.

c) Conclure (le second cas est symétrique).

d) Montrer que le résultat est faux avec 5 personnes (construire un contre-exemple : chacun connaît exactement ses deux voisins autour d'une table ronde).

Exercice 11 – L'ordre lexicographique

Sur $\mathbb{N}^2$, on pose $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d)$ si $a < c$, ou si $a = c$ et $b \leq d$.

a) Montrer que c'est une relation d'ordre total.

b) Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ a un plus petit élément.

c) Existe-t-il une suite strictement décroissante infinie pour cet ordre ? Conséquence ?

d) Pourtant $(1, 0)$ a une infinité d'éléments plus petits : lesquels ? Comparer avec $\mathbb{N}$.

Exercice 12 – Q est dénombrable

a) Montrer que tout rationnel s'écrit de façon unique $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

b) En déduire une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

c) Construire une injection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ (utiliser $2^a 3^b$ et une bijection $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$).

d) Conclure que $\mathbb{Q}$ est dénombrable (on admet qu'une partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$). Comparer avec $P(\mathbb{N})$.

Exercice 13 – Quatre caractérisations de l'inclusion

Soient A, B des parties de E. Montrer l'équivalence des quatre propriétés en établissant une chaîne d'implications :

(i) $A \subset B$; (ii) $A \cup B = B$; (iii) $A \cap B = A$; (iv) $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) $(i) \Rightarrow (ii)$.

b) $(ii) \Rightarrow (iii)$.

c) $(iii) \Rightarrow (iv)$ et $(iv) \Rightarrow (i)$.

d) Traduire (iv) avec les indicatrices.

Exercice 14 – Récurrence et inégalité arithmético-géométrique

On veut montrer que pour des réels $x_1, \dots, x_n > 0$: $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

a) Démontrer le cas $n = 2$.

b) Montrer par récurrence que l'inégalité vaut pour $n = 2^k$ (grouper les termes deux par deux).

c) Pour n quelconque, choisir $2^k \geq n$ et compléter avec $2^k - n$ termes égaux à la moyenne m des x_i (récurrence « de Cauchy », vers le bas).

d) Application : montrer que $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 15 – Synthèse : une bijection de [0, 1] sur [0, 1[

On cherche une bijection $f : [0,1] \to [0,1[$ (l'intervalle fermé « a un point de plus »).

a) On pose $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \geq 1$, et $f(x) = x$ si x n'est pas de la forme $\dfrac{1}{n}$. Calculer $f(1)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

b) Montrer que f est à valeurs dans $[0,1[$.

c) Montrer que f est bijective en construisant sa réciproque.

d) Expliquer l'idée (« hôtel de Hilbert ») et montrer qu'une telle bijection ne peut pas être continue et monotone.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).