Plaquette 4 – Anneaux : inversibles, diviseurs de zéro, nilpotents

Structures algébriques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Dans un **anneau**, on additionne et on multiplie, mais on ne divise pas toujours : tout le travail consiste à repérer les **inversibles** (on peut diviser par eux), les **diviseurs de zéro** (on ne peut pas simplifier), les **nilpotents** et les **idempotents**. Deux réflexes : montrer qu'une partie est un anneau en en faisant un **sous-anneau** d'un anneau connu ; et, dans un anneau **non commutatif**, ne jamais écrire $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sans avoir vérifié $ab = ba$.

Exercice 1 – Reconnaître un sous-anneau

Dire si chaque partie est un sous-anneau de l'anneau indiqué, en justifiant.

a) $2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$;

b) $\mathrm{D} = \left\langle \frac{k}{10^n},\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\rangle$ dans $\mathbb{Q}$;

c) $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathbb{C}$;

d) $\{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

e) $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

f) $\left\langle a + b\sqrt[3]{2},\ a, b \in \mathbb{Q} \right\rangle$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 – Calculer dans un anneau non commutatif

Dans $M_2(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer AB et BA, puis $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Conclure.

b) Développer $(a+b)^2$ dans un anneau quelconque. À quelle condition retrouve-t-on l'identité remarquable usuelle ?

c) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 et N^3, puis $(I_3 + N)^n$ pour $n \geq 2$ par la formule du binôme, en justifiant son emploi. Donner $(I_3 + N)^{10}$.

Exercice 3 – Diviseurs de zéro

a) Montrer qu'un élément inversible d'un anneau n'est jamais diviseur de zéro.

b) Trouver deux fonctions non nulles $f, g \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $fg = 0$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A\hat{A}$ où $\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Plus généralement, montrer que dans $M_2(\mathbb{R})$, toute matrice non nulle est soit inversible, soit diviseur de zéro.

d) Montrer de même que dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, toute classe non nulle est soit inversible, soit diviseur de zéro. Exemple : $\overline{8}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Éléments nilpotents

Soit A un anneau.

a) Soit $a \in A$ tel que $a^n = 0$. Montrer que $1 - a$ est inversible et donner son inverse.

b) On suppose A commutatif. Montrer que la somme de deux nilpotents est nilpotente.

c) Montrer que b) est faux dans $M_2(\mathbb{R})$, avec E_{12} et E_{21}.

d) Déterminer les nilpotents de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

e) Retrouver l'inverse de $\overline{3}$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ grâce à a).

Exercice 5 – Idempotents et anneaux de Boole

Un élément e d'un anneau est **idempotent** si $e^2 = e$.

a) Montrer que si e est idempotent, $1 - e$ l'est aussi et $e(1 - e) = 0$.

b) Déterminer les idempotents de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Montrer que les seuls idempotents d'un anneau intègre sont 0 et 1.

c) Un **anneau de Boole** est un anneau où $x^2 = x$ pour tout x. Montrer que $2x = 0$ pour tout x (développer $(x + x)^2$), puis que l'anneau est commutatif (développer $(x + y)^2$).

d) Montrer que $(P(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole (on admet les axiomes d'anneau). Que valent 0 et 1 ?

Exercice 6 – Le groupe des inversibles d'un anneau

a) Montrer que l'ensemble $A^\times$ des inversibles d'un anneau A est un groupe pour la multiplication.

b) Montrer que $(A \times B)^\times = A^\times \times B^\times$ pour l'anneau produit (opérations composante par composante).

c) Déterminer $\mathbb{Z}^\times$, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^\times$ et $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\times$.

d) Lister $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ et montrer qu'il est cyclique. Comparer avec $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 7 – Les inversibles de Z[√2] et l'équation de Pell

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, sous-anneau de $\mathbb{R}$ (on l'admet). Pour $x = a + b\sqrt{2}$, on pose $\sigma(x) = a - b\sqrt{2}$ et $N(x) = x\,\sigma(x) = a^2 - 2b^2$.

a) Justifier que l'écriture $a + b\sqrt{2}$ est unique, puis que σ est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même. En déduire $N(xy) = N(x)N(y)$.

b) Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

c) Montrer que $u = 1 + \sqrt{2}$ est inversible et que le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est infini.

d) Calculer u^2, u^4 et u^6. En déduire trois solutions entières de l'équation de Pell $a^2 - 2b^2 = 1$, et une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Morphismes d'anneaux

a) Soit A un anneau. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A.

b) Déterminer les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.

c) Déterminer les morphismes d'anneaux $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tels que $f(x) = x$ pour tout réel x.

d) Le déterminant $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et le module $z \mapsto |z|$ sont-ils des morphismes d'anneaux ?

Exercice 9 – Un anneau intègre fini est un corps

Soit A un anneau intègre **fini**.

a) Pour $a \in A \setminus \{0\}$, montrer que $\varphi_a : x \mapsto ax$ est injective, puis bijective. En déduire que A est un corps.

b) Donner un anneau intègre qui n'est pas un corps. Quelle hypothèse manque ?

c) En déduire que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement s'il est intègre, si et seulement si n est premier.

d) Calculer l'inverse de $\overline{7}$ dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ par l'algorithme d'Euclide étendu.

Exercice 10 – L'anneau des fonctions continues

On note $A = C([0,1], \mathbb{R})$, sous-anneau de $F([0,1], \mathbb{R})$.

a) Déterminer les inversibles de A.

b) Montrer que A n'est pas intègre, avec $f(x) = \max\left(0, \frac{1}{2} - x\right)$ et $g(x) = \max\left(0, x - \frac{1}{2}\right)$.

c) Déterminer les idempotents de A. Comparer avec ceux de $F([0,1], \mathbb{R})$.

d) Montrer que $h : x \mapsto x$ n'est ni inversible, ni diviseur de zéro dans A.

Exercice 11 – L'anneau des nombres décimaux

On note $\mathrm{D} = \left\langle \frac{k}{10^n},\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\rangle$, sous-anneau de $\mathbb{Q}$ (exercice 1).

a) Montrer que $\frac{1}{3} \notin \mathrm{D}$.

b) Montrer que les inversibles de D sont les $\pm 2^a 5^b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

c) 0,125 et 0,3 sont-ils inversibles dans D ?

d) Montrer que D est intègre mais n'est pas un corps.

Exercice 12 – Matrices triangulaires supérieures

On note $T = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\rangle$.

a) Montrer que T est un sous-anneau non commutatif de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\pi : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto (a, c)$ est un morphisme d'anneaux surjectif de T sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer son noyau (pour l'addition) et montrer que ses éléments sont nilpotents.

c) Déterminer $T^\times$ et vérifier que l'inverse d'un élément de $T^\times$ est dans T.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Montrer qu'un élément de T est nilpotent si et seulement si $a = c = 0$.

Exercice 13 – Binôme et morphisme de Frobenius

Soit p un nombre premier.

a) Montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$ (utiliser $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$).

b) Soit A un anneau commutatif dans lequel $p \cdot 1_A = 0$. Montrer que $(a+b)^p = a^p + b^p$, puis que $F : x \mapsto x^p$ est un morphisme d'anneaux de A dans A.

c) En déduire, par récurrence sur k, que $\overline{k}^{\,p} = \overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (petit théorème de Fermat).

d) Montrer que l'hypothèse « p premier » est indispensable, en étudiant $x \mapsto x^4$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 14 – Les quaternions

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{H} = \{M(a,b),\ a,b \in \mathbb{C}\}$.

a) Montrer que H est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{C})$ (calculer $M(a,b)M(c,d)$).

b) Calculer $\det M(a,b)$. En déduire que tout élément non nul de H est inversible dans H.

c) On pose $I = M(\mathrm{i}, 0)$, $J = M(0,1)$ et $K = IJ$. Calculer I^2, J^2, K, JI et K^2. L'anneau H est-il un corps ?

d) Montrer que $X^2 = -I_2$ a une infinité de solutions dans H (chercher $X = bI + cJ + dK$ avec b, c, d réels).

Exercice 15 – Synthèse : entiers de Gauss et sommes de deux carrés

On note $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b,\ a,b \in \mathbb{Z}\}$ et, pour $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $N(z) = |z|^2$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau intègre et que $N(zw) = N(z)N(w)$, avec $N(z) \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times$.

c) En déduire que le produit de deux sommes de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés, avec une formule explicite.

d) Écrire 5 et 13 comme sommes de deux carrés, puis 65 de **deux** façons, en calculant $(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$ et $(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$.

e) Montrer qu'un entier congru à 3 modulo 4 n'est pas somme de deux carrés. En déduire que 3 ne s'écrit pas zw avec $z, w \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ non inversibles, alors que 5 s'écrit ainsi.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).