Plaquette 1 – Groupes, sous-groupes, morphismes, anneaux et corps

Structures algébriques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On vérifie les axiomes d'un groupe, on utilise la **caractérisation des sous-groupes**, on calcule noyau et image d'un **morphisme**, et on distingue anneau, anneau intègre et corps.

Exercice 1 – Vérifier une structure de groupe

Sur $G =]-1\,;1[$, on définit $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.

Exercice 2 – Sous-groupe

Montrer que $H = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$.

Exercice 3 – Morphisme et noyau

Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to \left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

a) Montrer que f est un morphisme de groupes.

b) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. Conclure.

Exercice 4 – Ordre d'un élément

Dans le groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$, déterminer l'ordre de $\overline{3}$ et de $\overline{5}$.

Exercice 5 – Groupe symétrique

Dans S_3, soient $\sigma = (1\ 2\ 3)$ (cycle) et $\tau = (1\ 2)$ (transposition).

a) Calculer σ^2, σ^3 et τ^2.

b) S_3 est-il abélien ?

Exercice 6 – Anneau et diviseurs de zéro

Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

a) Calculer $\overline{2} \times \overline{3}$.

b) L'anneau est-il intègre ? Est-ce un corps ?

Exercice 7 – Sous-groupes de Z

Déterminer $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$ et le sous-groupe engendré par $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Morphisme d'anneaux

L'application $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $k \mapsto \overline{k}$, est-elle un morphisme d'anneaux ? Quel est son noyau ?

Exercice 9 – Groupe des inversibles

Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et donner l'inverse de $\overline{7}$.

Exercice 10 – Corps

L'ensemble $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\langle a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\rangle$ est-il un corps ?

Exercice 11 – Centre d'un groupe

Soit G un groupe. Montrer que $Z(G) = \{a \in G \mid \forall x \in G,\ ax = xa\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 12 – Table de Cayley et groupe de Klein

Soit $V = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\} \subset \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, muni de la multiplication.

a) Dresser la table de la loi et en déduire que $(V, \times)$ est un groupe abélien.

b) Déterminer l'ordre de chaque élément. V est-il cyclique ?

c) Montrer que V n'est pas isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, mais qu'il est isomorphe à $\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +\right)$.

Exercice 13 – Exponentielle imaginaire et cercle unité

On note $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $\varphi:(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$, $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

a) Montrer que φ est un morphisme de groupes et que U est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

b) Déterminer l'image et le noyau de φ. Est-il injectif ?

c) Déterminer $\varphi^{-1}(U_n)$, où U_n est le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 14 – Réunion de deux sous-groupes

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, \cdot)$.

a) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

b) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

c) Application : $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe de $\mathbb{Z}$? Quel est le plus petit sous-groupe qui le contient ?

Exercice 15 – Synthèse : groupe des racines de l'unité

Soit $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

a) Montrer que U_n est un sous-groupe de $\left(\mathbb{C}^*, \times\right)$.

b) Montrer que U_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).