Plaquette 2 – Groupes, sous-groupes et théorème de Lagrange

Structures algébriques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une partie est un **groupe**, le plus court est presque toujours d'en faire un **sous-groupe** d'un groupe connu ($\mathbb{C}^*$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, les bijections d'un ensemble) : on vérifie seulement $e \in H$ et $xy^{-1} \in H$. Dans un groupe **fini**, le **théorème de Lagrange** ($\mathrm{card} H$ divise $\mathrm{card} G$) contrôle tout : l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe, un groupe d'ordre premier est cyclique, et $x^{\mathrm{card} G} = e$.

Exercice 1 – Reconnaître un groupe

Parmi les ensembles munis d'une loi suivants, lesquels sont des groupes ? Justifier chaque réponse par l'axiome qui manque ou par un argument de sous-groupe.

a) $(\mathbb{N}, +)$;
b) $(\mathbb{Z}, -)$;
c) $(\mathbb{Q}^*, \times)$;
d) $(\mathbb{R}, \max)$;
e) $(\{-1, 1\}, \times)$;
f) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}, \times)$.

Exercice 2 – Une loi transportée

Sur $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose $x * y = x + y - xy$.

a) Vérifier que $1 - x * y = (1 - x)(1 - y)$. En déduire que $*$ est une loi interne sur G.

b) Montrer que $f : G \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto 1 - x$, est bijective et vérifie $f(x * y) = f(x) f(y)$.

c) En déduire sans calcul que $(G, *)$ est un groupe abélien. Donner son neutre et l'inverse de x ; vérifier pour $x = 3$.

Exercice 3 – Différence symétrique

Soit E un ensemble. Pour $A, B \subset E$, on note $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

a) Montrer que la fonction indicatrice vérifie $1_{A \Delta B} \equiv 1_A + 1_B \pmod 2$ en tout point.

b) En déduire que $(P(E), \Delta)$ est un groupe abélien. Neutre ? Inverse de A ?

c) Résoudre l'équation $A \,\Delta\, X = B$ d'inconnue $X \subset E$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Le groupe des isométries du carré

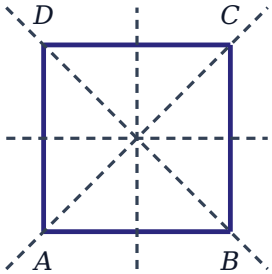
On note D_4 l'ensemble des isométries du plan qui conservent le carré $ABCD$ de centre O (figure). On admet que c'est un groupe pour la composition.

a) Montrer que D_4 contient 4 rotations et 4 réflexions, que l'on décrira. On note r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ et s la réflexion d'axe (AC).

b) Déterminer l'ordre de chaque élément.

c) Calculer $r \circ s$ et $s \circ r$ en suivant l'image de A et de B. Le groupe est-il abélien ?

d) Montrer que les rotations forment un sous-groupe cyclique et que $D_4 = \{r^k, r^k \circ s,\ 0 \leq k \leq 3\}$.



Le carré ABCD, son centre O et ses quatre axes de symétrie.

Exercice 5 – Sous-groupes de Z/12Z

a) Déterminer les sous-groupes engendrés par $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$ et $\overline{9}$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$. Quels sont leurs ordres ?

b) Quels éléments engendrent $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?

c) On admet que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par un $\overline{d}$ avec $d \mid n$. Lister tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et vérifier le théorème de Lagrange.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

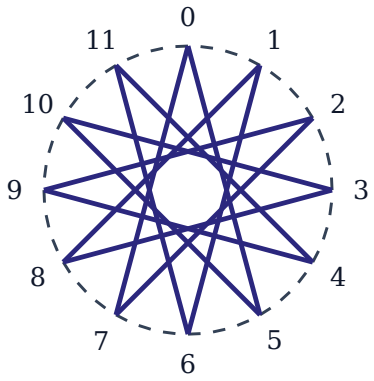
Exercice 6 – Le cycle des quintes

On numérote les douze demi-tons de la gamme tempérée par $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (do = 0, do♯ = 1, …, si = 11) : monter d'une octave ramène à la même note.

a) Une **quinte** correspond à 7 demi-tons. En partant de do, montrer qu'une suite de quintes passe par les douze notes avant de revenir à do. Écrire la suite.

b) Une **tierce majeure** vaut 4 demi-tons et une **tierce mineure** 3. Quels sous-groupes engendrent-elles ? Interpréter l'accord augmenté $(0, 4, 8)$ et l'accord diminué $(0, 3, 6, 9)$.

c) Quels intervalles (en demi-tons) permettent, comme la quinte, de parcourir toutes les notes ?



En sautant de 7 demi-tons à chaque pas, on passe par les douze notes avant de revenir au départ.

Exercice 7 – Démonstration du théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe. Pour $x \in G$, on note $xH = \{xh,\ h \in H\}$.

a) Montrer que $h \mapsto xh$ est une bijection de H sur xH.

b) Montrer que deux classes xH et yH sont égales ou disjointes (si $z \in xH \cap yH$, comparer xH, zH et yH).

c) En déduire que $\operatorname{card} H$ divise $\operatorname{card} G$.

d) Application : montrer qu'un groupe d'ordre premier p est cyclique, engendré par n'importe quel élément différent de e.

Exercice 8 – Lagrange redonne Fermat et Euler

a) Soit G un groupe fini de cardinal N. Montrer que $x^N = e$ pour tout $x \in G$.

b) En appliquant a) au groupe $\left((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times\right)$ avec p premier, retrouver le petit théorème de Fermat.

c) De même, retrouver le théorème d'Euler $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ pour $a \wedge n = 1$.

d) Calculer 2^{100} modulo 13 par cette méthode.

Exercice 9 – Nombres complexes vus comme matrices

On note $C = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$.

a) Montrer que C est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ (calculer $\det M(a,b)$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$M(a,b)M(c,d)$).

b) Montrer que $\Phi:(\mathbb{C}^*,\times)\to(C,\times)$, $a+\mathrm{i}b\mapsto M(a,b)$, est un isomorphisme de groupes.

c) Quelle est l'image par Φ du sous-groupe U ? Interpréter géométriquement $M(\cos\theta,\sin\theta)$.

Exercice 10 – Ordre d'un produit

Soit G un groupe, $a,b\in G$ d'ordres finis m et n.

a) On suppose $ab=ba$ et $m\wedge n=1$. Montrer que ab est d'ordre mn (montrer d'abord que $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$).

b) Montrer que l'hypothèse $m\wedge n=1$ est nécessaire, par un exemple dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

c) Dans S_3, trouver deux éléments d'ordre 2 dont le produit est d'ordre 3. Pourquoi a) ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 11 – Groupes où tout élément est d'ordre au plus 2

Soit G un groupe tel que $x^2=e$ pour tout $x\in G$.

a) Montrer que $x^{-1}=x$ pour tout x, puis que G est abélien (calculer $(xy)^2$).

b) Donner trois exemples de tels groupes.

c) On suppose G fini, non réduit à $\{e\}$. Soit $a\neq e$ et $H=\{e,a\}$. Montrer que H est un sous-groupe et que, si $b\notin H$, $K=\{e,a,b,ab\}$ est un sous-groupe de cardinal 4. En déduire que $\mathrm{card}G$ est une puissance de 2 lorsque $\mathrm{card}G\leq 8$ (on admettra le cas général).

Exercice 12 – Groupes produits cycliques

a) Montrer que $\left(\overline{1},\overline{1}\right)$ est d'ordre 6 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. En déduire que ce groupe est cyclique, isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

b) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas cyclique.

c) Plus généralement, montrer que l'ordre de (x,y) dans $G\times G'$ est le PPCM des ordres de x et y, et en déduire que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si $m\wedge n=1$.

Exercice 13 – Sous-groupes finis de C*

Soit H un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*,\times)$, de cardinal n.

a) Montrer que $z^n=1$ pour tout $z\in H$, puis que $H\subset U_n$.

b) En déduire que $H=U_n$.

c) Montrer que $U_4\cup U_6$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, et déterminer le plus petit sous-groupe fini qui le contient.

Exercice 14 – Sous-groupes de R et densité

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$, et $\alpha=\inf(H\cap\mathbb{R}_+^*)$.

a) On suppose $\alpha>0$. Montrer que $\alpha\in H$ (raisonner par l'absurde avec deux éléments

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

de H dans $[\alpha, 2\alpha[$, puis que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

b) On suppose $\alpha = 0$. Montrer que H est **dense** dans $\mathbb{R}$: tout intervalle $]x, x+\varepsilon[$ contient un élément de H.

c) Application : on pose $H = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$. Vérifier que $\sqrt{2} - 1 \in H$ et que $(\sqrt{2}-1)^n \in H$ pour tout n. En déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15 – Synthèse : les groupes d'ordre 4

Soit G un groupe de cardinal 4, de neutre e.

a) Quels sont les ordres possibles de ses éléments ?

b) Montrer que s'il existe un élément d'ordre 4, alors $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

c) Sinon, montrer que G est abélien et que sa table est celle du groupe de Klein. En déduire qu'il y a, à isomorphisme près, exactement deux groupes d'ordre 4.

d) Classer : U_4 ; $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$; $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$; les rotations du carré ; $\{\mathrm{id}, s_1, s_2, r^2\}$ dans D_4, où s_1, s_2 sont les réflexions d'axes les médiatrices des côtés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).