Plaquette 3 – Morphismes et isomorphismes de groupes

Structures algébriques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Un **morphisme** $f : G \to G'$ transporte la loi : $f(xy) = f(x)f(y)$. On l'étudie par son **noyau** $\ker f = f^{-1}(\{e'\})$, qui mesure le défaut d'injectivité, et par son **image**, qui mesure la surjectivité. Pour montrer que deux groupes sont **isomorphes**, on exhibe une bijection qui transporte la loi ; pour montrer qu'ils **ne le sont pas**, on cherche une propriété conservée qui les sépare : commutativité, ordre des éléments, caractère cyclique, existence de racines carrées.

Exercice 1 – Reconnaître un morphisme

Dire si chaque application est un morphisme de groupes, en justifiant.

a) $\det : (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times) \to (\mathbb{R}^*, \times)$;

b) $x \mapsto 3x$, de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$;

c) $x \mapsto x + 1$, de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$;

d) $z \mapsto |z|$, de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$;

e) $x \mapsto x^2$, de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$;

f) $x \mapsto x^2$, d'un groupe $(G, \cdot)$ dans lui-même ;

g) $M \mapsto \left(M^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$, de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ dans lui-même.

Exercice 2 – Noyaux et images classiques

Pour chacun des morphismes suivants, vérifier qu'il s'agit d'un morphisme, puis déterminer son noyau et son image. Est-il injectif ? surjectif ?

a) $\det : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times) \to (\mathbb{R}^*, \times)$, avec $n \geq 2$;

b) $z \mapsto |z|$, de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$;

c) $z \mapsto \mathrm{e}^z$, de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$;

d) $x \mapsto x^3$, puis $x \mapsto x^4$, de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même.

Exercice 3 – Morphismes de Z dans un groupe

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G$.

a) Montrer que $f_a : (\mathbb{Z}, +) \to G$, $k \mapsto a^k$, est un morphisme de groupes. Quelle est son image ?

b) Montrer que tout morphisme $f : \mathbb{Z} \to G$ est de la forme f_a, avec $a = f(1)$.

c) Montrer que $\ker f_a = \{0\}$ si a est d'ordre infini, et $\ker f_a = m\mathbb{Z}$ si a est d'ordre fini m.

d) Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même, puis tous ses automorphismes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Morphismes entre groupes cycliques

Soient $n, m \geq 1$ et $d = n \wedge m$.

a) Soit $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes additifs et $a = f(\overline{1})$. Montrer que $f(\overline{k}) = ka$ et que $na = \overline{0}$.

b) Réciproquement, si $a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ vérifie $na = \overline{0}$, montrer que $\overline{k} \mapsto ka$ est bien défini et est un morphisme.

c) En déduire qu'il y a exactement d morphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

d) Lister les morphismes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, et ceux de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 5 – Automorphismes de Z/nZ

Soit $n \geq 2$. D'après l'exercice précédent, les endomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les $f_a : x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

a) Montrer que f_a est un automorphisme si et seulement si a est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) Montrer que $a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de $\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times\right)$ sur $(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \circ)$.

c) Décrire $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$: cardinal, et groupe cyclique ou de Klein ?

Exercice 6 – Automorphismes intérieurs et centre

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour $g \in G$, on pose $i_g : G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$.

a) Montrer que i_g est un automorphisme de G et préciser sa réciproque.

b) Montrer que $\Phi : g \mapsto i_g$ est un morphisme de $(G, \cdot)$ dans $(\mathrm{Aut}G, \circ)$ et que son noyau est le centre $Z(G)$.

c) Que vaut Φ lorsque G est abélien ?

d) Dans S_3, avec $\tau = (1\ 2)$ et $\sigma = (1\ 2\ 3)$, calculer $i_\tau(\sigma)$. En déduire que Φ n'est pas le morphisme trivial et, sachant que $Z(S_3) = \{\mathrm{id}\}$, que les 6 automorphismes intérieurs de S_3 sont distincts.

Exercice 7 – Images directes et réciproques de sous-groupes

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

a) Montrer que si H est un sous-groupe de G, $f(H)$ est un sous-groupe de G'.

b) Montrer que si K' est un sous-groupe de G', $f^{-1}(K')$ est un sous-groupe de G qui contient $\ker f$.

c) En déduire sans calcul que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M,\ \det M > 0\}$ et $\{M,\ \det M = \pm 1\}$ sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

d) $\{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \det M < 0\}$ est-il un sous-groupe ?

Exercice 8 – Montrer que deux groupes ne sont pas isomorphes

Dans chaque cas, montrer que les deux groupes ne sont pas isomorphes, en trouvant une propriété conservée par isomorphisme que l'un possède et pas l'autre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$;
b) $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$;
c) $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$;
d) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$;
e) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et S_3.

Exercice 9 – Morphismes continus de (R, +)

Soit $f:(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ un morphisme **continu**, et $a = f(1)$.

a) Montrer que $f(n) = na$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis que $f(r) = ra$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

b) En déduire que $f(x) = ax$ pour tout réel x.

c) Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

d) Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 10 – Le groupe des similitudes directes

Pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, on note $s_{a,b}:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$, et S l'ensemble de ces applications.

a) Calculer $s_{a,b} \circ s_{c,d}$. Montrer que S est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$.

b) Montrer que $\varphi:s_{a,b} \mapsto a$ est un morphisme de $(S, \circ)$ sur $(\mathbb{C}^*, \times)$. Quel est son noyau ?

c) S est-il abélien ?

d) Soit ρ et ρ' deux rotations (de centres quelconques) d'angles θ et θ', avec $\theta + \theta' \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que $\rho \circ \rho'$ est une rotation dont on donnera l'angle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Isométries du triangle équilatéral

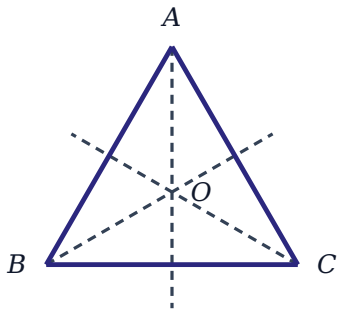
Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et D_3 le groupe (pour la composition) des isométries du plan qui conservent le triangle.

a) Montrer que toute $g \in D_3$ permute $\{A, B, C\}$, et que $\Phi : g \mapsto g_{|\{A,B,C\}}$ est un morphisme de D_3 dans le groupe des permutations de $\{A, B, C\}$, que l'on identifie à S_3.

b) Montrer que Φ est injectif (une isométrie qui fixe trois points non alignés est l'identité).

c) Trouver dans D_3 des antécédents des 6 permutations. Conclure que $D_3 \simeq S_3$.

d) En déduire, sans calcul d'isométries, que D_3 n'est pas abélien, et donner l'ordre de chacun de ses éléments.



Le triangle équilatéral ABC, son centre O et ses trois axes de symétrie.

Exercice 12 – Ordre et morphismes : les morphismes de S3 dans C*

a) Soit $f : G \to G'$ un morphisme et $x \in G$ d'ordre fini m. Montrer que l'ordre de $f(x)$ divise m.

b) Soit $f : S_3 \to (\mathbb{C}^*, \times)$ un morphisme. Montrer que $f(\tau) \in \{-1, 1\}$ pour toute transposition τ.

c) Vérifier que $(1\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)$ et $(2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$. En déduire que f prend la même valeur ε sur les trois transpositions.

d) Vérifier que $(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2) = (2\ 3)(1\ 2)$. En déduire qu'il y a au plus deux morphismes de S_3 dans $\mathbb{C}^*$, et les décrire (on admet que le second existe : c'est la **signature**).

e) Existe-t-il un morphisme non trivial de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Exercice 13 – Le sous-groupe engendré par 2 et 3

On considère $\varphi : (\mathbb{Z}^2, +) \to (\mathbb{Q}^*, \times)$, $(a, b) \mapsto 2^a 3^b$.

a) Montrer que φ est un morphisme de groupes.

b) Montrer que φ est injectif (utiliser la valuation 2-adique).

c) En déduire que le sous-groupe de $\mathbb{Q}^*$ engendré par 2 et 3 est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

d) Montrer que $\mathbb{Z}^2$ n'est pas monogène.

e) Application musicale : montrer qu'aucune puissance non nulle de la quinte $\frac{3}{2}$ n'est égale à une puissance de l'octave 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Puissances dans le groupe des racines de l'unité

Soit $n \geq 2$, $k \geq 1$, $d = n \wedge k$, et $f_k : U_n \to U_n$, $z \mapsto z^k$.

a) Justifier que f_k est un morphisme de $(U_n, \times)$ dans lui-même.

b) Montrer que $\ker f_k = U_d$ (utiliser une relation de Bézout).

c) Montrer que $\mathrm{Im} f_k = U_{n/d}$.

d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f_k soit un automorphisme de U_n.

e) Application : $n = 12$, $k = 8$. Décrire noyau et image, et vérifier que $\mathrm{card}(\ker f)_k \times \mathrm{card}(\mathrm{Im} f)_k = 12$.

Exercice 15 – Synthèse : les carrés modulo p

Partie A. Soit $f : G \to G'$ un morphisme, G fini, et $y = f(x_0) \in \mathrm{Im} f$.

a) Montrer que $f^{-1}(\{y\}) = x_0 \ker f = \{x_0 h,\ h \in \ker f\}$, et en déduire $\mathrm{card} G = \mathrm{card}(\ker f) \times \mathrm{card}(\mathrm{Im} f)$.

Partie B. Soit p un nombre premier impair, $G = \left((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times\right)$ et $f : x \mapsto x^2$.

b) Montrer que $\ker f = \{\overline{1}, -\overline{1}\}$ et en déduire le nombre de carrés non nuls dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

c) Lister les carrés non nuls modulo 11.

d) Montrer que si x est un carré non nul, $x^{(p-1)/2} = \overline{1}$. On admet la réciproque (**critère d'Euler**). Retrouver par ce critère que $\overline{2}$ n'est pas un carré modulo 11 et que $\overline{3}$ en est un.

e) Montrer que $-\overline{1}$ est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 4$. Vérifier sur $p = 13$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).