Plaquette 1 – Convergence, monotonie, suites récurrentes et suites adjacentes

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et théorèmes du cours.

— **Convergence** : $u_n \to \ell$ si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$
— Toute suite convergente est **bornée** ; la limite est **unique**.
— **Théorème de la limite monotone** : une suite croissante et **majorée** converge ; une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
— **Théorème des gendarmes** : si $a_n \leq u_n \leq b_n$ et $a_n, b_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.
— **Suites adjacentes** : si (u_n) croît, (v_n) décroît et $v_n - u_n \to 0$, les deux suites **convergent vers la même limite**, et $u_n \leq \ell \leq v_n$.
— **Suites géométriques** : $q^n \to 0$ si $|q| < 1$; $q^n \to +\infty$ si $q > 1$; divergence si $q \leq -1$.
— **Suite arithmético-géométrique** $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$) : le point fixe $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ donne $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$.
— **Récurrence linéaire d'ordre 2** $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$: équation caractéristique $r^2 = ar + b$. Deux racines distinctes $\Rightarrow u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$; racine double r $\Rightarrow u_n = (\lambda + \mu n) r^n$.
— **Suite récurrente** $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est **continue** et $u_n \to \ell$, alors ℓ est un **point fixe** de f ($f(\ell) = \ell$). Si f est croissante et stabilise un intervalle, (u_n) est monotone.
— **Théorème de Bolzano-Weierstrass** : toute suite bornée admet une **sous-suite convergente**.

Correction de l'exercice 1 – Limite par encadrement

On traite les deux termes séparément.

— **Premier terme** : $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \to 0$, donc $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$ (gendarmes avec $-\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n}$).

— **Second terme** : $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}} \to 1$.

— Par somme de limites, $u_n \to 0 + 1 = 1$.

— **Remarque** : le terme alterné n'empêche pas la convergence car son **module** tend vers 0. C'est le réflexe à avoir avec $(-1)^n$.

Réponse. $u_n \to 1$.

Correction de l'exercice 2 – Monotonie et convergence

a) **Récurrence**. $u_0 = 1 \in [0\,;2]$.

— Si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $2 \leq 2 + u_n \leq 4$, donc $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. En particulier $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

— La propriété est héréditaire : elle vaut pour tout n.

b) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + u_n - u_n^2 = -(u_n^2 - u_n - 2) = -(u_n - 2)(u_n + 1)$.

— Pour $u_n \in [0\,;2]$: $u_n - 2 \leq 0$ et $u_n + 1 > 0$, donc l'expression est ≥ 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Les termes étant positifs, $u_{n+1} \geq u_n$: la suite est **croissante**.

c) (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle **converge** vers un réel $\ell \in [1\,;2]$.

— $f(x) = \sqrt{2+x}$ est continue, donc ℓ vérifie $\ell = \sqrt{2+\ell}$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$.
— Les racines sont 2 et -1 ; seule $\ell = 2$ est compatible avec $\ell \geq 1$.
— **Conclusion** : $u_n \to 2$.

Réponse. c) $u_n \to 2$.

Correction de l'exercice 3 – Suite arithmético-géométrique

Point fixe : $\ell = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$.

— On pose $v_n = u_n - 6$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$$

— (v_n) est **géométrique** de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 5 - 6 = -1$.
— Donc $v_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = 6 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
— **Contrôle** : $u_1 = 6 - 0{,}5 = 5{,}5$, et directement $\dfrac{1}{2} \times 5 + 3 = 5{,}5$. Cohérent.
— Comme $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, $u_n \to 6$ (par valeurs inférieures, la suite est croissante).

Réponse. $u_n = 6 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, limite 6.

Correction de l'exercice 4 – Récurrence linéaire d'ordre 2

Équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$.

— Discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, racines $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.
— La forme générale est $u_n = \lambda\, 2^n + \mu\, 3^n$.
— **Conditions initiales** : $\lambda + \mu = 0$ et $2\lambda + 3\mu = 1$.
— De la première, $\lambda = -\mu$; en substituant : $-2\mu + 3\mu = 1$, donc $\mu = 1$ et $\lambda = -1$.
— **Conclusion** :

$$u_n = 3^n - 2^n$$

— **Vérification** : $u_2 = 9 - 4 = 5$, et $5u_1 - 6u_0 = 5$. $u_3 = 27 - 8 = 19$, et $5 \times 5 - 6 \times 1 = 19$. Cohérent.

Réponse. $u_n = 3^n - 2^n$.

Correction de l'exercice 5 – Racine double

Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$, soit $(r-2)^2 = 0$.

— Racine **double** $r = 2$, d'où la forme $u_n = (\lambda + \mu n)2^n$.
— $u_0 = \lambda = 1$.
— $u_1 = (1 + \mu) \times 2 = 4$, donc $1 + \mu = 2$ et $\mu = 1$.
— **Conclusion** : $u_n = (1 + n)2^n$.
— **Vérification** : $u_2 = 3 \times 4 = 12$, et $4 \times 4 - 4 \times 1 = 12$. $u_3 = 4 \times 8 = 32$, et $4 \times 12 - 4 \times 4 = 32$. Cohérent.
— **Piège** : dans le cas d'une racine double, écrire $\lambda r^n + \mu r^n$ ne donne qu'**une** constante et ne peut pas satisfaire deux conditions initiales indépendantes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $u_n = (n+1)2^n$.

Correction de l'exercice 6 – Suite divergente

Raisonnement par l'absurde. Supposons $u_n \to \ell$.

— La sous-suite des termes pairs est constante égale à 1, donc converge vers 1 : $\ell = 1$.
— La sous-suite des termes impairs est constante égale à -1, donc $\ell = -1$.
— Or la limite d'une suite convergente est **unique** : contradiction avec $1 \neq -1$.
— Donc (u_n) **diverge**.
— **Méthode générale** : deux sous-suites de limites différentes suffisent à prouver la divergence. C'est l'outil le plus rapide face à un $(-1)^n$ non amorti.

Réponse. Deux sous-suites de limites 1 et -1 : divergence.

Correction de l'exercice 7 – Gendarmes avec une somme

On encadre chaque terme de la somme.

— Pour $1 \leq k \leq n$: $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$, donc $\dfrac{1}{n^2+n} \leq \dfrac{1}{n^2+k} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$.
— En sommant les n termes :

$$\frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

— Les deux bornes tendent vers 0 : $\dfrac{n}{n^2+n} = \dfrac{1}{n+1} \to 0$ et $\dfrac{n}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n} \to 0$.
— **Gendarmes** : $u_n \to 0$.
— **Piège classique** : ne pas conclure « chaque terme tend vers 0 donc la somme tend vers 0 » — le nombre de termes varie avec n. Il faut encadrer la somme entière.

Réponse. $u_n \to 0$.

Correction de l'exercice 8 – Suites adjacentes

— (u_n) **croît** : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.
— (v_n) **décroît** (admis ; le calcul donne $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{n(n+1)!} < 0$).
— **Écart** : $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \cdot n!} \to 0$.
— Les suites sont donc **adjacentes** : elles convergent vers une même limite ℓ, avec $u_n \leq \ell \leq v_n$. Cette limite est e.

Encadrement à l'ordre 4 :

— $u_4 = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{65}{24} \approx 2{,}708333$.
— $v_4 = u_4 + \dfrac{1}{4 \times 24} = u_4 + \dfrac{1}{96} \approx 2{,}718750$.
— Donc $2{,}7083 \leq \mathrm{e} \leq 2{,}7188$, ce qui est cohérent avec $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$.

Réponse. $2{,}7083 \leq \mathrm{e} \leq 2{,}7188$.

Correction de l'exercice 9 – Point fixe et fonction décroissante

a) **Récurrence**. $u_0 = 0 \in [0\,;1]$.

— Si $u_n \in [0\,;1]$, alors $1 + u_n \in [1\,;2]$, donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right] \subset [0\,;1]$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ est **continue** sur $[0\,;1]$. Si $u_n \to \ell$, alors $\ell = \dfrac{1}{1+\ell}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Soit $\ell^2 + \ell - 1 = 0$, de discriminant 5 et de racines $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

— Seule $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$ appartient à $[0\,;1]$.

— **Attention** : f est **décroissante**, donc (u_n) n'est pas monotone — elle oscille autour de ℓ ($u_1 = 1$, $u_2 = 0{,}5$, $u_3 \approx 0{,}667$, $u_4 = 0{,}6$). Ce sont les suites extraites paire et impaire qui sont monotones.

— On reconnaît l'inverse du **nombre d'or**.

Réponse. b) $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$.

Correction de l'exercice 10 – Croissances comparées

— a) L'exponentielle l'emporte sur toute puissance : $\dfrac{n^{10}}{2^n} \to 0$. (Rigoureusement : $\dfrac{n^{10}}{2^n} = \mathrm{e}^{10\ln n - n\ln 2}$ et $10\ln n - n\ln 2 \to -\infty$.)

— b) Toute puissance positive l'emporte sur le logarithme : $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$. (Poser $t = \sqrt{n}$: $\dfrac{2\ln t}{t} \to 0$.)

— c) $n^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$, et $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$, donc $n^{1/n} \to \mathrm{e}^0 = 1$.

— **Contrôle numérique de c)** : $100^{0{,}01} \approx 1{,}047$, 10^6 élevé à la puissance 10^{-6} vaut $\approx 1{,}0000138$. La convergence vers 1 est très lente mais nette.

Réponse. a) 0 · b) 0 · c) 1.

Correction de l'exercice 11 – Césaro

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$ pour $k \geq N$.

— On coupe la somme : $v_n - \ell = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)$.

— Donc $|v_n - \ell| \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|u_k - \ell| + \dfrac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|u_k - \ell| \leq \dfrac{C}{n} + \dfrac{n-N+1}{n}\varepsilon$ où C est la somme **fixe** des $N-1$ premiers écarts.

— Le premier terme tend vers 0, le second est $\leq \varepsilon$. Donc pour n assez grand $|v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$: $v_n \to \ell$.

Réciproque fausse : avec $u_n = (-1)^n$, la suite diverge mais $v_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2n} \to 0$ (moyenne des n premiers termes, comprise entre $-\frac{1}{n}$ et 0).

— **Retenir** : la moyennisation « lisse » les oscillations ; elle ne perd pas la limite mais peut en créer une.

Réponse. $v_n \to \ell$; réciproque fausse avec $(-1)^n$.

Correction de l'exercice 12 – Bolzano-Weierstrass

On applique le théorème de **Bolzano-Weierstrass**.

— Pour tout n : $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc (u_n) est **bornée**.

— Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente : il existe donc une extraction φ strictement croissante telle que $(\sin \varphi(n))$ converge.

— **Remarque** : $(\sin n)$ elle-même **diverge** (on peut montrer que ses valeurs sont denses dans $[-1\,;1]$, car π est irrationnel). Il existe donc des sous-suites convergeant vers **n'importe quelle** valeur de $[-1\,;1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Force du théorème** : il ne construit rien, il affirme une existence — c'est l'outil des démonstrations de compacité.

Réponse. Suite bornée ⇒ sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass).

Correction de l'exercice 13 – Synthèse : vitesse de convergence

a) Pour $x > 0$: $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \sqrt{2} = \frac{x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2}{2x} = \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x} \geq 0$.

— Donc dès que $u_n > 0$, on a $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$. Comme $u_0 = 2 > 0$ et que la relation conserve la positivité, $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 1$ (et $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$ aussi).

b) Le calcul précédent donne exactement $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.

— Or $u_n \geq \sqrt{2}$, donc $2u_n \geq 2\sqrt{2}$ et $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$.

c) Posons $e_n = u_n - \sqrt{2} \geq 0$. Alors $e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2\sqrt{2}}$.

— $e_0 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$, donc $e_1 \leq \frac{0{,}586^2}{2{,}828} \approx 0{,}121$, puis $e_2 \leq 0{,}0052$, $e_3 \leq 9{,}6 \times 10^{-6}$.

— L'erreur est **élevée au carré** à chaque étape : la convergence est **quadratique** et $u_n \to \sqrt{2}$.

— C'est la **méthode de Héron** (cas particulier de Newton appliqué à $x^2 - 2$) : le nombre de décimales exactes double à chaque itération.

Réponse. c) $u_n \to \sqrt{2}$, avec convergence quadratique.

Correction de l'exercice 14 – Itérer le sinus

a) Sur $]0, 1]$, $0 < \sin x < x$: par récurrence $u_n \in]0, 1]$ et $u_{n+1} < u_n$. La limite $\ell \in [0, 1]$ vérifie $\sin \ell = \ell$ (continuité), donc $\ell = 0$.

b) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$ et $x^2 - \sin^2 x = \frac{x^4}{3} + o(x^4)$, $x^2 \sin^2 x \sim x^4$:

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

c) Césaro : $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) \to \frac{1}{3}$, donc $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$ et $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

d) $\sqrt{0{,}03} \approx 0{,}1732$ et $\sqrt{0{,}003} \approx 0{,}05477$: écarts relatifs 2,5 % puis 0,3 %, qui diminuent ✓.

Réponse. $u_n \to 0$ et $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Correction de l'exercice 15 – Moyenne arithmético-géométrique

a) $\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2}$ pour $n \geq 0$, donc $a_{n+1} \leq b_{n+1}$.

b) $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$ et $b_{n+1} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n$.

c) $b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$. Donc $b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0$: suites adjacentes, de limite commune $M(a_0, b_0)$.

d)

$$(a_1, b_1) = (1{,}41421; 1{,}5), \quad (a_2, b_2) = (1{,}456475; 1{,}457107), \quad a_3 \approx b_3 \approx 1{,}4567910$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Le nombre de décimales exactes double à chaque étape : convergence **quadratique**, bien plus rapide que la borne 2^{-n}.

Réponse. Suites adjacentes, limite $M(1,2) \approx 1{,}456791$, convergence quadratique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).