Plaquette 3 – Définition de la limite, opérations et suites extraites

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions. $u_n \to \ell$ et $u_n \to +\infty$ s'écrivent :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon \qquad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ u_n \geq A$$

- **Négation** : $u_n \not\to \ell \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0,\ \forall N,\ \exists n \geq N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon$.
- **Borné × tend vers 0** : tend vers 0.
- Si $u_n \to \ell > 0$, alors $u_n > \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang.
- **Passage à la limite** : $u_n \leq v_n$ pour tout n donne $\ell \leq \ell'$; les inégalités **strictes** deviennent **larges**.
- **Suite extraite** $(u_{\varphi(n)})$, φ strictement croissante ($\varphi(n) \geq n$) : même limite que (u_n).
- $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell \Rightarrow u_n \to \ell$.
- **Caractérisation séquentielle** : $s = \sup A \Leftrightarrow s$ majore A et il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ avec $a_n \to s$.

Correction de l'exercice 1 – Retour à la définition

a) On calcule l'écart à la limite supposée :

$$|u_n - 3| = \left|\frac{3n + 1 - 3(n+2)}{n+2}\right| = \frac{5}{n+2}$$

- Soit $\varepsilon > 0$. On a $\frac{5}{n+2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{5}{\varepsilon} - 2$.
- On pose $N = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil$: pour tout $n \geq N$, $n + 2 > \frac{5}{\varepsilon}$, donc $|u_n - 3| \leq \varepsilon$.
- La définition est vérifiée : $u_n \to 3$.

b) $\frac{5}{n+2} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n + 2 \geq 5000 \Leftrightarrow n \geq 4998$.

c) La définition demande **l'existence** d'un rang convenable : tout rang plus grand convient aussi. On peut donc majorer grossièrement l'écart, ce qui simplifie la recherche de N (c'est l'objet de l'exercice suivant).

Réponse. $|u_n - 3| = \frac{5}{n+2}$; $N = \lceil 5/\varepsilon \rceil$ convient ; $|u_n - 3| \leq 10^{-3}$ dès $n \geq 4998$.

Correction de l'exercice 2 – Tendre vers l'infini : majorer grossièrement

a) $u_n - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2} - 10n = \frac{n(n-20)}{2} \geq 0$ pour $n \geq 20$.

b) Soit $A > 0$. Si $n \geq 20$ et $n \geq \sqrt{2A}$, alors

$$u_n \geq \frac{n^2}{2} \geq \frac{2A}{2} = A$$

- Donc $N = \max\left(20, \lceil \sqrt{2A} \rceil\right)$ convient : $u_n \to +\infty$.
- La minoration par $\frac{n^2}{2}$ évite de résoudre l'équation du second degré $n^2 - 10n = A$.

c) Rang de b) : $\lceil \sqrt{2 \times 10^6} \rceil = \lceil 1414{,}2 \rceil = 1415$.

- Rang optimal : $n^2 - 10n \geq 10^6 \Leftrightarrow n \geq 5 + \sqrt{25 + 10^6} \approx 1005{,}01$, soit $n \geq 1006$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Le rang de b) est plus grand, mais il est **valable** : c'est tout ce que demande la définition.

Réponse. $N = \max(20, \lceil\sqrt{2A}\rceil)$; pour $A = 10^6$: 1415 (le rang optimal est 1006).

Correction de l'exercice 3 – Nier la convergence

a) On échange les quantificateurs et on nie l'inégalité finale :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon \qquad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists n,\ u_n > M$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}$; on prend $n = 6N \geq N$. Alors $u_n = \cos(2N\pi) = 1$ et $|u_n - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. La négation est vérifiée : $u \not\to \frac{1}{2}$.

c) Les suites extraites $u_{6k} = 1$ et $u_{6k+3} = \cos(2k\pi + \pi) = -1$ sont constantes, de limites 1 et -1. Si (u_n) convergeait vers ℓ, toutes ses suites extraites tendraient vers ℓ, d'où $\ell = 1 = -1$: absurde.

d) $v_n = (-1)^n n$. $v_{2k} = 2k$: non majorée. $v_{2k+1} = -(2k+1)$: non minorée. Elle ne tend pas vers $+\infty$: pour $A = 0$, tout rang N est dépassé par un n impair où $v_n < 0$.

Réponse. $u_{6k} = 1$ et $u_{6k+3} = -1$: (u_n) diverge. (v_n) n'est ni majorée ni minorée et ne tend pas vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 4 – Bornée fois tend vers 0

a) Soit $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout n, et $\varepsilon > 0$.

— Comme $b_n \to 0$, il existe N tel que $|b_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ pour $n \geq N$.

— Alors, pour $n \geq N$:

$$|a_n b_n| \leq M|b_n| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

— d'où $a_n b_n \to 0$. On a appliqué la définition de $b_n \to 0$ avec $\frac{\varepsilon}{M}$ au lieu de ε : c'est licite puisque $\frac{\varepsilon}{M} > 0$.

b) $\sin n$ est bornée par 1 et $\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n} \to 0$: $u_n \to 0$.

— Par la quantité conjuguée, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$, et $(-1)^n$ est bornée : $v_n \to 0$.

c) $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$: $a_n b_n$ a des termes pairs qui tendent vers 1 et des termes impairs qui tendent vers -1. Elle diverge. Le lemme exige vraiment une limite **nulle**.

Réponse. $u_n \to 0$, $v_n \to 0$; contre-exemple : $(-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Correction de l'exercice 5 – Limite strictement positive

a) On applique la définition avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$: il existe N tel que, pour $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2} \Longrightarrow u_n \geq \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$$

b) Pour $n \geq N$, $u_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$: $\ln u_n$ est défini.

c) Non : $u_n = \frac{1}{n} > 0$ et $\ell = 0$. Le passage à la limite transforme l'inégalité **stricte** $u_n > 0$ en inégalité **large** $\ell \geq 0$.

d) Définition avec $\varepsilon = \frac{1}{3}$: pour $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{3}$.

— Pour $n, m \geq N$, $|u_n - u_m| \leq \frac{2}{3} < 1$ par l'inégalité triangulaire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Deux entiers distants de moins de 1 sont égaux : $u_n = u_N$ pour tout $n \geq N$. La suite est stationnaire (et $\ell = u_N \in \mathbb{Z}$).

Réponse. $u_n \geq \frac{\ell}{2}$ à partir d'un rang ; $\ell \geq 0$ seulement si $u_n > 0$; une suite d'entiers convergente est stationnaire.

Correction de l'exercice 6 – Formes indéterminées : contre-exemples

Les théorèmes d'opérations ne concluent pas dans les cas « $\infty - \infty$ » et « $0 \times \infty$ » : la limite dépend des suites.

a) $u_n = n + c$ et $v_n = -n$: $u_n + v_n = c$.

b) $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$: $u_n + v_n = (-1)^n$ diverge.

c) $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n^2$: $u_n v_n = n \to +\infty$. Puis $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = n$: $u_n v_n = \frac{1}{n} \to 0$.

d) $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -(-1)^n$: $u_n + v_n = 0$ et

$$u_n v_n = -\left((-1)^n\right)^2 = -1$$

— les deux suites divergent, mais leur somme et leur produit sont constants.

Réponse. Exemples : $n + c$ et $-n$; $n + (-1)^n$ et $-n$; $\frac{1}{n}$ et n^2 ; $(-1)^n$ et $-(-1)^n$.

Correction de l'exercice 7 – Recoller les termes pairs et impairs

a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $|u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N_1$, et N_2 tel que $|u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N_2$.

— Pour $n \geq N = 2\max(N_1, N_2) + 1$: si $n = 2p$ alors $p \geq N_1$; si $n = 2p + 1$ alors $p \geq N_2$. Dans les deux cas $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

b) On calcule les accroissements :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \qquad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < 0$$

— (S_{2n}) croît, (S_{2n+1}) décroît, et $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \to 0$: elles sont adjacentes.

c) Elles convergent vers une même limite ℓ, et par a) $S_n \to \ell$ (qui vaut $\ln 2$).

d) $S_{10} \approx 0{,}645635$ et $S_{11} \approx 0{,}736544$. Suites adjacentes : $S_{10} \leq \ln 2 \leq S_{11}$, soit $0{,}6456 \leq \ln 2 \leq 0{,}7366$ ($\ln 2 \approx 0{,}6931$). Encadrement large : la convergence est lente, l'écart vaut $\frac{1}{11}$.

Réponse. (S_{2n}) et (S_{2n+1}) adjacentes, $S_n \to \ln 2$; $0{,}6456 \leq \ln 2 \leq 0{,}7366$.

Correction de l'exercice 8 – Trois suites extraites

Notons a, b, c les limites de (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}).

a) $u_{6n} = u_{2(3n)}$ avec $n \mapsto 3n$ strictement croissante, et $u_{6n} = u_{3(2n)}$. Toute suite extraite d'une suite convergente a la même limite :

$$\lim u_{6n} = a = c$$

b) $u_{6n+3} = u_{2(3n+1)+1} = u_{3(2n+1)}$ est extraite de (u_{2n+1}) et de (u_{3n}) : $b = c$.

c) On obtient $a = c = b$; par l'exercice précédent (recollement des termes pairs et impairs), $u_n \to a$.

d) Soit $u_n = 1$ si n est premier avec 6, et $u_n = 0$ sinon. Tout multiple de 2 ou de 3 donne 0 : (u_{2n}) et (u_{3n}) sont nulles. Mais $u_{6n+1} = 1$: (u_n) diverge.

Réponse. u_{6n} et u_{6n+3} imposent des limites égales, donc (u_n) converge ; (u_{2n}) et (u_{3n})

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

seules ne suffisent pas.

Correction de l'exercice 9 – Valeurs d'adhérence

a) $u_{2n} \to 1$ et $u_{2n+1} \to -1$: valeurs 1 et -1, et ce sont les seules car toute suite extraite a une infinité d'indices pairs ou une infinité d'impairs. v_n prend les valeurs $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ selon n modulo 3 : valeurs 1 et $-\frac{1}{2}$.

b) Toute suite extraite d'une suite convergente a la même limite.

c) $w_{2n} = 2n \to +\infty$ et $w_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \to 0$: 0 est valeur d'adhérence, mais (w_n) n'est pas bornée, donc ne converge pas.

d) Si $u_{\not n} \to \ell$, il existe $\varepsilon > 0$ et une infinité d'indices tels que

$$|u_n - \ell| > \varepsilon$$

— On range ces indices en une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$, encore bornée. Par **Bolzano-Weierstrass**, elle a une sous-suite qui converge vers un ℓ' avec $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$: c'est une seconde valeur d'adhérence, contradiction.
— L'exemple c) montre que l'hypothèse « bornée » est indispensable.

Réponse. $\{1, -1\}$ et $\{1, -\frac{1}{2}\}$; (w_n) a la valeur d'adhérence 0 mais diverge ; bornée + unique valeur d'adhérence $\Rightarrow$ convergence.

Correction de l'exercice 10 – Approcher un réel par des rationnels

a) Par définition de la partie entière, $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Avec $y = 10^n x$:

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$$

— puis on divise par $10^n > 0$. u_n est un entier divisé par 10^n : il est rationnel.

b) $x - 10^{-n} \to x$ et $x \to x$: gendarmes, $u_n \to x$.

c) $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$: $u_0 = 1$, $u_1 = 1{,}4$, $u_2 = 1{,}41$, $u_3 = 1{,}414$ (troncatures décimales).

d) $w_n = u_n + \frac{\sqrt{2}}{n}$ $(n \geq 1)$ est irrationnel : sinon $\sqrt{2} = n(w_n - u_n)$ serait rationnel. Et $w_n \to x + 0 = x$.

Réponse. $x - 10^{-n} < u_n \leq x$, donc $u_n \to x$: $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 – Borne supérieure et suites

a) ($\Rightarrow$) Pour $n \geq 1$, $s - \frac{1}{n}$ ne majore pas A : il existe $a_n \in A$ avec $s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$. Gendarmes : $a_n \to s$.

— ($\Leftarrow$) Soit M un majorant de A : $a_n \leq M$ pour tout n, et le passage à la limite donne $s \leq M$. Donc s est le plus petit majorant.

b) Pour $n \geq 1$, on majore :

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{n-1}{n^2} \leq 1$$

— 1 majore A, et les éléments de A tendent vers 1 : $\sup A = 1$ par a).
— Ce n'est pas un maximum : l'égalité demanderait $n = 1$, qui donne $1 - 1 - 1 = -1 \neq 1$; pour $n \geq 2$, le terme vaut au plus $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < 1$.

c) $\sqrt{2}$ majore B (si $x > \sqrt{2} > 0$, $x^2 > 2$). Les troncatures décimales u_n de $\sqrt{2}$ (exercice précédent) sont rationnelles, de carré < 2, et tendent vers $\sqrt{2}$: $\sup B = \sqrt{2}$ par a). Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ce n'est pas un maximum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\sup A = 1$ non atteint ; $\sup B = \sqrt{2}$ non atteint.

Correction de l'exercice 12 – Des écarts qui tendent vers 0 ne suffisent pas

a) $u_n = \sqrt{n}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$. $u_n = \ln n$: $u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$.

b) $|u_{n+1} - u_n| \le \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.

c) Notons $t_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. Par définition de la partie entière, $t_k^2 - 1 < n_k \le t_k^2$, donc

$$0 \le t_k - \sqrt{n_k} \le t_k - \sqrt{t_k^2 - 1} = \frac{1}{t_k + \sqrt{t_k^2 - 1}} \to 0$$

— Alors $|u_{n_k} - 1| = |\sin\sqrt{n_k} - \sin t_k| \le |\sqrt{n_k} - t_k| \to 0$: $u_{n_k} \to 1$.

d) Le même calcul avec $t'_k = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ fournit une suite extraite qui tend vers -1. Deux valeurs d'adhérence distinctes : (u_n) diverge, alors que ses écarts successifs tendent vers 0.

Réponse. $\sin\sqrt{n}$ a des sous-suites de limites 1 et -1 : elle diverge, bien que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

Correction de l'exercice 13 – Un produit infini

a) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \dfrac{1}{2^{n+1}} > 1$ et $P_n > 0$: croissante.

b) Le logarithme transforme le produit en somme :

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

— en utilisant $\ln(1+x) \le x$ (concavité) et la somme géométrique.

c) $P_n \le \mathrm{e}$: croissante et majorée, (P_n) converge (limite monotone). Par passage à la limite, $P_1 = \frac{3}{2} \le P \le \mathrm{e}$.

d) Calcul direct : $P_{10} \approx 2{,}3819$. L'écart à P est d'environ 0,002 : les facteurs suivants sont très proches de 1.

Réponse. (P_n) croissante majorée par e ; $P_{10} \approx 2{,}3819$ et $P \approx 2{,}3842$.

Correction de l'exercice 14 – Les formes 1 puissance infini

On écrit toujours $a_n^{b_n} = \mathrm{e}^{b_n \ln a_n}$ et l'on utilise la limite de référence :

$$\frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 1$$

a) $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} \to 1$, et exp est continue : la suite tend vers e.

b) Pour $x \neq 0$ et $n > |x|$: $n \ln(1 + \frac{x}{n}) = x \cdot \dfrac{\ln(1 + x/n)}{x/n} \to x$. Pour $x = 0$ la suite vaut $1 = \mathrm{e}^0$.

c) $n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n \cdot \dfrac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} \sim n \to +\infty$: limite $+\infty$. Et $n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n} \to 0$: limite 1.

d) 2,5937 ; 2,7048 ; 2,7169, pour e $\approx 2{,}7183$. L'erreur est à peu près divisée par 10 quand n est multiplié par 10 : convergence lente, en $\frac{\mathrm{e}}{2n}$.

Réponse. $(1 + \frac{x}{n})^n \to \mathrm{e}^x$; $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$; $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : une somme qui tend vers ln 2

a) On écrit la différence : il apparaît deux termes et il en disparaît un,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

b) $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, donc sur $[k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, et sur $[k-1, k]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k}$. En intégrant :

— $\ln(k+1) - \ln k = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$;

— $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln k - \ln(k-1)$.

c) On somme pour k de $n+1$ à $2n$; les sommes de logarithmes **télescopent** :

— minorant : $\ln(2n+1) - \ln(n+1)$; majorant : $\ln(2n) - \ln n = \ln 2$.

— $\frac{2n+1}{n+1} \to 2$ et ln est continue : par les gendarmes, $u_n \to \ln 2$.

d) $u_{10} = \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{20} \approx 0{,}66877$. Encadrement :
$\ln \frac{21}{11} \approx 0{,}64663 \leq 0{,}66877 \leq \ln 2 \approx 0{,}69315$ ✓.

Réponse. (u_n) croissante, $\ln \frac{2n+1}{n+1} \leq u_n \leq \ln 2$, donc $u_n \to \ln 2$; $u_{10} \approx 0{,}6688$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).