Plaquette 5 – Suites complexes, récurrences linéaires et modélisation

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Récurrence linéaire d'ordre 2 $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (a, b réels, $b \neq 0$), équation $r^2 = ar + b$:

$$\Delta < 0,\ r = \rho\, \mathrm{e}^{\pm i\theta} \Longrightarrow u_n = \rho^n(\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$$

- $\Delta > 0$: $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$; $\Delta = 0$: $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$.
- **Suite complexe** : $z_n \to \ell \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, \ell$ et $\mathrm{Im}\, z_n \to \mathrm{Im}\, \ell$; $|z_n - \ell| \to 0$ équivalent.
- $q^n \to 0 \Leftrightarrow |q| < 1$ (pour $q \in \mathbb{C}$).
- **Point fixe** : $z_{n+1} = qz_n + b$, $q \neq 1$: $z_n - \omega = q^n(z_0 - \omega)$ avec $\omega = \dfrac{b}{1-q}$.
- **Second membre** : solution générale = solution particulière + solution de l'équation homogène.
- **Mensualité** d'un prêt C au taux t par période sur N périodes : $M = \dfrac{Ct}{1 - (1+t)^{-N}}$.

Correction de l'exercice 1 – Spirale vers un point fixe

a) $\omega = \frac{1+i}{2}\omega + 1 \Leftrightarrow \omega \cdot \frac{1-i}{2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i$.

b) En soustrayant $\omega = q\omega + 1$ à $z_{n+1} = qz_n + 1$ (avec $q = \frac{1+i}{2}$) : $z_{n+1} - \omega = q(z_n - \omega)$. La suite $(z_n - \omega)$ est géométrique de raison q.

c) On passe à la forme exponentielle :

$$q = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, \mathrm{e}^{i\pi/4}$$

- À chaque pas, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$ tourne de $\frac{\pi}{4}$ et sa longueur est multipliée par $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$: le robot décrit une **spirale** qui s'enroule vers $\Omega(1+i)$.

d) $q^8 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 \mathrm{e}^{2i\pi} = \frac{1}{16}$, donc $z_8 = \omega - \frac{\omega}{16} = \frac{15}{16}(1+i) = 0{,}9375 + 0{,}9375\, i$, et $|z_8 - \omega| = \frac{\sqrt{2}}{16} \approx 0{,}088$.

- $|z_n - \omega| = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(\sqrt{2} \times 10^3)}{\ln \sqrt{2}} \approx 20{,}9$: dès $n = 21$.

Réponse. $\omega = 1 + i$, $z_n = (1+i)\left(1 - \left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right)$; $|z_n - \omega| < 10^{-3}$ dès $n = 21$.

Correction de l'exercice 2 – Limite d'une suite complexe

a) $\left|1 + \frac{i}{n}\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$, donc

$$|z_n| = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)$$

- et $\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n} \to 0$: $|z_n| \to 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $1+\frac{i}{n}$ a une partie réelle >0 : un argument est $\arctan\frac{1}{n}$, et l'argument d'une puissance n-ième est multiplié par n. Comme $\arctan h \sim h$ en 0, $\theta_n = n\arctan\frac{1}{n} \to 1$.

c) $z_n = |z_n|\,\mathrm{e}^{i\theta_n} = |z_n|(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$; par continuité de cos et sin, $\operatorname{Re} z_n \to \cos 1$ et $\operatorname{Im} z_n \to \sin 1$: $z_n \to \mathrm{e}^{i}$.

d) $\mathrm{e}^{i} = \cos 1 + i\sin 1 \approx 0{,}5403 + 0{,}8415\,i$. L'écart passe d'environ 0,05 pour $n=10$ à 0,005 pour $n=100$: convergence en $\frac{1}{n}$. C'est l'analogue complexe de $(1+\frac{x}{n})^n \to \mathrm{e}^{x}$.

Réponse. $|z_n| \to 1$, $\arg z_n \to 1$: $z_n \to \mathrm{e}^{i} = \cos 1 + i\sin 1$.

Correction de l'exercice 3 – Une récurrence périodique

a) $0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1$: la suite semble **périodique de période 6**.

b) $r^2 - r + 1 = 0$, $\Delta = -3$, racines $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm i\pi/3}$: module $\rho = 1$, argument $\theta = \frac{\pi}{3}$.

c) D'après le cours :

$$u_n = \lambda\cos\frac{n\pi}{3} + \mu\sin\frac{n\pi}{3}$$

— $u_0 = \lambda = 0$; $u_1 = \mu\sin\frac{\pi}{3} = \mu\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$, donc $\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

— Contrôle : $u_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ ✓, $u_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{4\pi}{3} = -1$ ✓.

d) $u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} = (u_{n+1} - u_n) - u_{n+1} = -u_n$. Donc $u_{n+6} = -u_{n+3} = u_n$: période 6 (et c'est la plus petite, vu a)).

Réponse. $u_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$, suite 6-périodique ($u_{n+3} = -u_n$).

Correction de l'exercice 4 – Racines complexes de module √2

a) $r^2 - 2r + 2 = 0$, $\Delta = -4$, racines $1 \pm i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pm i\pi/4}$.

b) Forme générale :

$$u_n = (\sqrt{2})^n\left(\lambda\cos\frac{n\pi}{4} + \mu\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

— $u_0 = \lambda = 1$; $u_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mu\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \mu = 1$, donc $\mu = 0$.

c) Récurrence : $u_2 = 2 - 2 = 0$, $u_3 = 0 - 2 = -2$, $u_4 = -4 - 0 = -4$. Formule : $2\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = -2$, $4\cos\pi = -4$ ✓.

d) $u_{8k} = 2^{4k}\cos(2k\pi) = 16^k \to +\infty$ et $u_{8k+4} = 2^{4k+2}\cos(2k\pi+\pi) = -4\times 16^k \to -\infty$. La suite n'est ni majorée ni minorée et n'a pas de limite : ce sont des **oscillations d'amplitude croissante**, car le module $\sqrt{2}$ des racines dépasse 1.

Réponse. $u_n = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$: oscillations non bornées, pas de limite.

Correction de l'exercice 5 – Stabilité selon un paramètre

a) Si $|r_1|, |r_2| < 1$, chaque solution est combinaison de r_1^n, r_2^n (ou r^n, nr^n) qui tendent vers 0. Réciproquement, si une racine vérifie $|r| \geq 1$, la solution r^n (ou sa partie réelle, dans le cas complexe) ne tend pas vers 0.

b) $c \leq \frac{1}{4}$: racines $\frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$. La plus petite est > -1 car $\sqrt{1-4c} < 3$ (vrai si $c > -2$) ; pour $c \leq -2$ elle est ≤ -1. La plus grande est $< 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-4c} < 1 \Leftrightarrow c > 0$. Donc, pour $c \leq \frac{1}{4}$, la condition est $0 < c \leq \frac{1}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $c > \frac{1}{4}$: les racines sont conjuguées, de même module ρ, et leur produit vaut

$$r\bar{r} = \rho^2 = c$$

— donc $\rho < 1 \Leftrightarrow c < 1$.

d) Toutes les solutions tendent vers 0 si et seulement si $0 < c < 1$. Pour $c = \frac{1}{2}$: $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oscillations amorties. Pour $c = 1$: $\rho = 1$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, c'est la suite **6-périodique** de l'exercice précédent : pas de limite.

Réponse. Toutes les solutions tendent vers 0 si et seulement si $0 < c < 1$.

Correction de l'exercice 6 – Récurrence avec second membre

a) $p_{n+1} = 2p_n + n$ s'écrit $a(n+1) + b = 2an + 2b + n$ pour tout n. On identifie :

— coefficients de n : $a = 2a + 1$, donc $a = -1$;
— constantes : $a + b = 2b$, donc $b = a = -1$. Ainsi $p_n = -n - 1$.

b) $v_n = u_n - p_n$ vérifie $v_{n+1} = 2v_n$ (on soustrait les deux relations) : $v_n = v_0\, 2^n$ avec $v_0 = u_0 - p_0 = 1$. Donc

$$u_n = 2^n - n - 1$$

c) Récurrence : $u_1 = 0$, $u_2 = 0 + 1 = 1$, $u_3 = 2 + 2 = 4$. Formule : $2 - 2 = 0$, $4 - 3 = 1$, $8 - 4 = 4$ ✓.

d) $\frac{n+1}{2^n} \to 0$ (croissances comparées), donc $u_n \sim 2^n$ et $\frac{u_n}{2^n} \to 1$. Le second membre polynomial est négligeable devant la croissance géométrique. Remarque : $2^n - n - 1$ compte les parties d'un ensemble à n éléments ayant au moins 2 éléments.

Réponse. $u_n = 2^n - n - 1 \sim 2^n$.

Correction de l'exercice 7 – Récurrence d'ordre 3

a) $r = 1$ est racine évidente ($1 - 2 - 1 + 2 = 0$). Par division ou par groupement :

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = r^2(r-2) - (r-2) = (r-2)(r-1)(r+1)$$

b) Conditions initiales :

— $n = 0$: $a + b + c = 0$;
— $n = 1$: $a - b + 2c = 1$;
— $n = 2$: $a + b + 4c = 2$.
— La 3e moins la 1re : $3c = 2$, $c = \frac{2}{3}$. Puis $a + b = -\frac{2}{3}$ et $a - b = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$: $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{6}$.

c) Récurrence : $u_3 = 4 + 1 - 0 = 5$, $u_4 = 10 + 2 - 2 = 10$. Formule : $-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{16}{3} = 5$ ✓ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{32}{3} = 10$ ✓.

d) $u_n = \frac{2}{3}2^n + O(1)$, donc $u_n \sim \frac{2^{n+1}}{3}$: la racine de plus grand module l'emporte.

Réponse. $u_n = \frac{2}{3}2^n - \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{6} \sim \frac{2^{n+1}}{3}$.

Correction de l'exercice 8 – Changement de variable logarithmique

a) Par récurrence double, $u_n > 0$ (la racine d'un produit de réels > 0 est > 0). Le logarithme transforme la moyenne géométrique en moyenne arithmétique :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2}$$

b) Équation $2r^2 - r - 1 = 0$, racines 1 et $-\frac{1}{2}$: $v_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Avec $v_0 = 0$ et $v_1 = \ln 4$: $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \frac{\beta}{2} = \ln 4$, donc $\alpha = \frac{2}{3}\ln 4$ et $\beta = -\frac{2}{3}\ln 4$.

c) $v_n \to \frac{2}{3}\ln 4$ et exp est continue : $u_n \to 4^{2/3} = 2^{4/3} \approx 2{,}5198$.

— Autre méthode : $v_{n+2} + \frac{1}{2}v_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$ est **invariant**, égal à $v_1 + \frac{1}{2}v_0 = \ln 4$; à la limite, $\frac{3}{2}\alpha = \ln 4$.

d) $u_2 = 2$, $u_3 = \sqrt{8} \approx 2{,}828$, $u_4 \approx 2{,}378$, $u_5 \approx 2{,}594$: oscillations amorties autour de 2,5198 (raison $-\frac{1}{2}$ pour les logarithmes).

Réponse. $u_n \to 2^{4/3} \approx 2{,}52$.

Correction de l’exercice 9 – Deux suites couplées

a) $w_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + 2v_n}{4} = \frac{v_n - u_n}{4}$: géométrique de raison $\frac{1}{4}$, $w_n = \frac{9}{4^n}$.

b) On calcule la combinaison :

$$u_{n+1} + 2v_{n+1} = \frac{2u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n}{4} = u_n + 2v_n$$

— elle vaut toujours $u_0 + 2v_0 = 21$.

c) On résout $u_n + 2v_n = 21$ et $v_n - u_n = \frac{9}{4^n}$: $3v_n = 21 + \frac{9}{4^n}$, d’où

— $v_n = 7 + \frac{3}{4^n}$ et $u_n = 7 - \frac{6}{4^n}$. Limite commune : 7.

d) u_n croît et v_n décroît (formules), $v_n - u_n \to 0$: adjacentes.
$\frac{9}{4^n} < 10^{-6} \Leftrightarrow 4^n > 9 \times 10^6 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(9 \times 10^6)}{\ln 4} \approx 11{,}5$: dès $n = 12$.

Réponse. $u_n = 7 - \frac{6}{4^n}$, $v_n = 7 + \frac{3}{4^n}$, limite 7 ; $w_n < 10^{-6}$ dès $n = 12$.

Correction de l’exercice 10 – Moyenne arithmético-harmonique

a) $a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n$: produit **invariant**.

b) Pour $n \geq 0$:

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_nb_n}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \geq 0$$

c) Pour $n \geq 1$, $b_n \leq a_n$: $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq a_n$ et, le produit étant constant, $b_{n+1} = \frac{a_0b_0}{a_{n+1}} \geq \frac{a_0b_0}{a_n} = b_n$.

— Pour $n \geq 1$, $a_n + b_n \geq 2b_1$ (car $a_n \geq b_n \geq b_1$), et la formule de b) donne $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{(a_n - b_n)^2}{4b_1}$.

d) (a_n) décroît minorée par b_1, (b_n) croît majorée par a_1 : limites α et β. En passant à la limite dans $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$: $\alpha = \beta$. Et $\alpha^2 = a_0b_0$: la limite est $\sqrt{a_0b_0}$, la **moyenne géométrique**.

— $a_0 = 1$, $b_0 = 2$: $(a_1, b_1) = (1{,}5; 1{,}3333)$, $(a_2, b_2) = (1{,}416667; 1{,}411765)$, $(a_3, b_3) = (1{,}4142157; 1{,}4142114)$; la limite est $\sqrt{2} \approx 1{,}4142136$. L’écart est quasiment

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

élevé au carré à chaque pas : convergence **quadratique**, identique à celle de Héron.

Réponse. Produit invariant ; limite $\sqrt{a_0 b_0}$; pour $(1,2)$, $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près dès $n=3$.

Correction de l'exercice 11 – Moyenner un complexe et son module

a) Factorisation par l'angle moitié :

$$\frac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \frac{r_n}{2} e^{i\theta_n/2}\left(e^{i\theta_n/2} + e^{-i\theta_n/2}\right) = r_n \cos\frac{\theta_n}{2}\, e^{i\theta_n/2}$$

— et $\cos\frac{\theta_n}{2} > 0$ car $\theta_n \in]0,\pi[$: c'est bien la forme exponentielle (module >0).

b) Par récurrence, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ et $r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2}$: $\theta_n = \frac{\theta}{2^n}$ et le produit annoncé.

c) Par récurrence avec $\sin 2x = 2\sin x \cos x$: $\sin\frac{\theta}{2^n} = 2\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$ fait passer du rang n au rang $n+1$. Donc

— $r_n = \frac{r\sin\theta}{2^n \sin(\theta/2^n)}$ et $2^n \sin\frac{\theta}{2^n} \sim 2^n \cdot \frac{\theta}{2^n} = \theta$: $r_n \to \frac{r\sin\theta}{\theta}$.

d) $\theta_n \to 0$, donc $z_n = r_n e^{i\theta_n} \to \frac{r\sin\theta}{\theta}$, un **réel**. Pour $z_0 = i$: $r=1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, limite $\frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366$.

Réponse. $z_n \to \frac{r\sin\theta}{\theta}$; pour $z_0 = i$, la limite est $\frac{2}{\pi}$.

Correction de l'exercice 12 – Fibonacci : formule de Binet et pavages

a) $r^2 = r+1$ a pour racines φ et ψ : $F_n = \lambda\varphi^n + \mu\psi^n$. $F_0 = 0$ donne $\mu = -\lambda$; $F_1 = \lambda(\varphi - \psi) = \lambda\sqrt{5} = 1$. D'où

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

b) $|\psi| \approx 0{,}618 < 1$ donc $\psi^n \to 0$ et $F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. Plus précisément $\left|F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\psi|^n}{\sqrt{5}} \le \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$: F_n est l'entier le plus proche. Ex. : $\frac{\varphi^{30}}{\sqrt{5}} \approx 832\,040{,}0000002$ et $F_{30} = 832\,040$.

c) $n=1$: $F_2 F_0 - F_1^2 = -1$ ✓. Hérédité :
$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1}+F_n)F_n - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

d) On regarde l'extrémité droite de la bande : soit un domino vertical (il reste une bande $2\times(n-1)$), soit deux dominos horizontaux superposés (il reste $2\times(n-2)$). Donc $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$, avec $T_1 = 1 = F_2$ et $T_2 = 2 = F_3$: $T_n = F_{n+1}$. Pour $n=10$: $T_{10} = F_{11} = 89$ pavages.

Réponse. $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$; $T_{10} = F_{11} = 89$ pavages.

Correction de l'exercice 13 – Rembourser un emprunt

a) $\rho = (1+t)\rho - M \Leftrightarrow \rho = \frac{M}{t}$. L'écart au point fixe est géométrique de raison $1+t$:

$$R_n = \frac{M}{t} + (1+t)^n\left(C - \frac{M}{t}\right)$$

b) $R_N = 0 \Leftrightarrow (1+t)^N\left(\frac{M}{t} - C\right) = \frac{M}{t} \Leftrightarrow M\left(1 - (1+t)^{-N}\right) = Ct$, d'où

— $M = \frac{Ct}{1-(1+t)^{-N}} = \frac{450}{1 - 1{,}003^{-240}} \approx 877{,}67$ €.

c) Total versé : $240 \times 877{,}67 \approx 210\,640$ €, donc $60\,640$ € d'intérêts environ.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $R_{120} \approx 88\,336$ € : à mi-durée, on doit encore **59 %** du capital. Au début, la part d'intérêts (tR_n, soit 450 € le premier mois) est grande : le capital se rembourse lentement, puis de plus en plus vite.

Réponse. $M \approx 877{,}67$ € ; intérêts $\approx 60\,640$ € ; $R_{120} \approx 88\,336$ €.

Correction de l'exercice 14 – Météo à deux états

a) Avec le système complet $\{S_n, \overline{S_n}\}$:

$$p_{n+1} = 0{,}9\,p_n + 0{,}3\,(1 - p_n) = 0{,}6\,p_n + 0{,}3$$

b) Point fixe : $\ell = 0{,}6\ell + 0{,}3$, $\ell = 0{,}75$. Écart géométrique : $p_n - 0{,}75 = 0{,}6^n(p_0 - 0{,}75)$, soit $p_n = 0{,}75\left(1 - 0{,}6^n\right) \to 0{,}75$.

c) 0,3 ; 0,48 ; 0,588 ; 0,6528 ; 0,69168.

d) $0{,}75 \times 0{,}6^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0{,}01\,/\,0{,}75)}{\ln 0{,}6} \approx 8{,}45$: dès $n = 9$ jours. La limite ne dépend pas de p_0 (l'écart initial est multiplié par $0{,}6^n \to 0$) : c'est la **loi stationnaire** de la chaîne de Markov, 75 % de jours secs à long terme.

Réponse. $p_n = 0{,}75(1 - 0{,}6^n) \to 0{,}75$, indépendamment de p_0 ; à 0,01 près dès $n = 9$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : soutenabilité d'une dette publique

a) On divise par $P_{n+1} = (1+g)P_n$:

$$d_{n+1} = \frac{(1+r)D_n}{(1+g)P_n} - \frac{S_n}{P_{n+1}} = q d_n - s$$

b) $s = 0$: $d_n = q^n d_0$. Si $r < g$, $q < 1$ et $d_n \to 0$: la croissance « efface » la dette. Si $r > g$, $q > 1$ et $d_n \to +\infty$ (pour $d_0 > 0$) : la dette explose sans excédent. Si $r = g$, d_n est constant.

c) $q = \dfrac{1{,}02}{1{,}03} \approx 0{,}990291$. Point fixe $d^* = \dfrac{-s}{1-q} = -\dfrac{0{,}01}{0{,}009709} \approx -1{,}03$, et

— $d_n = d^* + q^n(d_0 - d^*) \approx -1{,}03 + 2{,}13\,q^n$. La limite, $-1{,}03$, correspond à une créance nette : dans ce modèle, l'excédent maintenu indéfiniment finirait par rembourser toute la dette.

d) $-1{,}03 + 2{,}13\,q^n \le 0{,}6 \Leftrightarrow q^n \le \dfrac{1{,}63}{2{,}13} \approx 0{,}7653 \Leftrightarrow n \ge \dfrac{\ln 0{,}7653}{\ln q} \approx 27{,}4$: il faut **28 ans**. La convergence est lente parce que q est très proche de 1.

Réponse. $d_n \approx -1{,}03 + 2{,}13 \times 0{,}9903^n$; sous 60 % au bout de 28 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).