Plaquette 4 – Suites définies implicitement et suites de sommes

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Comparaison série-intégrale : si f est décroissante sur $[k-1, k+1]$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- **Télescopage** : $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.
- **Somme harmonique** : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, $\gamma \approx 0{,}5772$.
- **Théorème de la bijection** : f continue et strictement monotone sur I réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- **Critère du quotient** : si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ ($u_n > 0$), alors $u_n^{1/n} \to \ell$; si $\ell < 1$, $u_n \to 0$.
- **Réinjection** : de $x_n \sim a_n$ et de l'équation, on tire le terme suivant du développement.

Correction de l'exercice 1 – La racine de $x^n + x = 1$

a) f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ (somme de deux fonctions croissantes, dont $x \mapsto x$ strictement), avec $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in \,]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b) En utilisant $x_n^n = 1 - x_n$:

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0$$

- Donc $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ et, f_{n+1} étant strictement croissante, $x_n < x_{n+1}$.

c) (x_n) croissante majorée par 1 converge vers $\ell \leq 1$. Si $\ell < 1$: $0 < x_n \leq \ell$, donc $x_n^n \leq \ell^n \to 0$, et $x_n = 1 - x_n^n \to 1$, ce qui contredit $\ell < 1$. Donc $\ell = 1$.

d) $x_1 = \frac{1}{2}$; x_2 est la racine positive de $x^2 + x - 1$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$. $0{,}8351^{10} \approx 0{,}1649$ et $0{,}1649 + 0{,}8351 = 1{,}0000$ ✓.

Réponse. (x_n) strictement croissante, $x_n \to 1$; $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 – Les solutions de $\tan x = x$

a) $g(x) = \tan x - x$ a pour dérivée $\tan^2 x \geq 0$, nulle en un seul point de I_n : g est strictement croissante sur I_n, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes. Bijection : unique zéro x_n.

b) $\tan(x_n - n\pi) = \tan x_n = x_n$ et $x_n - n\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$x_n - n\pi = \arctan x_n$$

- $|x_n - n\pi| \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\frac{x_n}{n\pi} \to 1$: $x_n \sim n\pi$.

c) $x_n \to +\infty$ et $\arctan y \to \frac{\pi}{2}$ quand $y \to +\infty$: $x_n - n\pi \to \frac{\pi}{2}$.

d) Pour $n \geq 1$, $x_n > 0$ et $\arctan x_n = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x_n}$. Comme $\frac{1}{x_n} \to 0$, $\arctan \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi}$. D'où le développement annoncé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $n = 1$: $\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \approx 4{,}394$ contre 4,4934 ; $n = 10$: 32,9549 contre 32,9564. L'approximation s'améliore quand n grandit, comme prévu.

Réponse. $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 3 – Racine d'une cubique à paramètre

a) $h(x) = x^3 + nx - 1$ a pour dérivée $3x^2 + n > 0$: strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $\mp\infty$. Unique racine x_n. $h(0) = -1 < 0$ et $h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} > 0$: $0 < x_n < \frac{1}{n}$.

b) Gendarmes : $x_n \to 0$. On **réinjecte** dans l'équation :

$$x_n = \frac{1 - x_n^3}{n} \quad \text{donc} \quad nx_n = 1 - x_n^3 \to 1$$

— soit $x_n \sim \frac{1}{n}$.

c) $\frac{1}{n} - x_n = \frac{1 - nx_n}{n} = \frac{x_n^3}{n}$. Et $x_n^3 \sim \frac{1}{n^3}$: $\frac{1}{n} - x_n \sim \frac{1}{n^4}$.

d) $\frac{1}{10} - 0{,}0999003 = 0{,}0000997 \approx 10^{-4} = \frac{1}{10^4}$ ✓. Le développement $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ est donc très précis.

Réponse. $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Correction de l'exercice 4 – Développement de la solution de ln x + x = n

a) $\varphi(x) = \ln x + x$ est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$, de limites $-\infty$ et $+\infty$: bijection sur $\mathbb{R}$, $x_n = \varphi^{-1}(n)$. φ^{-1} est strictement croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

b) $\varphi(1) = 1 \leq n$ donc $x_n \geq 1$ et $\ln x_n \geq 0$, d'où $x_n = n - \ln x_n \leq n$. Alors $0 \leq \ln x_n \leq \ln n$ et

$$1 - \frac{\ln n}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1$$

— gendarmes : $\frac{x_n}{n} \to 1$.

c) $x_n = n - \ln x_n = n - \ln n - \ln \frac{x_n}{n}$, et $\ln \frac{x_n}{n} \to \ln 1 = 0$ par continuité : $x_n = n - \ln n + o(1)$.

d) $10 - \ln 10 \approx 7{,}697$ contre 7,929 ; $1000 - \ln 1000 \approx 993{,}092$ contre 993,099. Le reste $o(1)$ vaut environ $\frac{\ln n}{n}$: 0,23 puis 0,007.

Réponse. $x_n = n - \ln n + o(1)$.

Correction de l'exercice 5 – Racine d'une somme géométrique

a) P_n est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$, $P_n(0) = 0 < 1 < n = P_n(1)$: bijection, unique $x_n \in]0, 1[$.

b) $P_{n+1}(x_n) = P_n(x_n) + x_n^{n+1} = 1 + x_n^{n+1} > 1 = P_{n+1}(x_{n+1})$. P_{n+1} étant strictement croissante, $x_n > x_{n+1}$.

c) Pour $x \neq 1$, on utilise la formule de la somme géométrique :

$$P_n(x) = x\frac{1 - x^n}{1 - x}$$

— $P_n(x_n) = 1$ donne $x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n$, soit $2x_n - 1 = x_n^{n+1}$.

d) (x_n) décroît : $0 < x_n \leq x_2 < 1$ pour $n \geq 2$. Donc

— $0 < x_n - \frac{1}{2} = \frac{x_n^{n+1}}{2} \leq \frac{x_2^{n+1}}{2} \to 0$: $x_n \to \frac{1}{2}$, à vitesse géométrique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$ (racine de $x^2 + x = 1$). $x_{10} - \dfrac{1}{2} \approx 0{,}000245$ et $\dfrac{0{,}500245^{11}}{2} \approx 0{,}000245$ ✓.

Réponse. (x_n) décroissante, $x_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x_n^{n+1}}{2}$, donc $x_n \to \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Divergence de la série harmonique

a) $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} \geq n \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$ (chacun des n termes est $\geq \dfrac{1}{2n}$). Si $H_n \to \ell$, alors $H_{2n} - H_n \to \ell - \ell = 0$: contradiction. (H_n) est croissante non convergente, donc non majorée : $H_n \to +\infty$.

b) $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ décroît, donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ (la seconde pour $k \geq 2$). En sommant :

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

— soit $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

c) On divise par $\ln n$: $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n} \to 1$ et $\dfrac{1+\ln n}{\ln n} \to 1$. Gendarmes : $H_n \sim \ln n$.

d) $\ln n + 0{,}5772 \geq 10 \Leftrightarrow n \geq \mathrm{e}^{9{,}4228} \approx 12\,367$. Il faut environ 12 367 termes : la divergence est extrêmement lente.

Réponse. $H_n \to +\infty$, $H_n \sim \ln n$; $H_n > 10$ à partir de $n \approx 12\,367$.

Correction de l'exercice 7 – La constante d'Euler

a) On utilise $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$$

— et $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \geq 0$.

b) $u_n - v_n = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to 0$: suites adjacentes, limite commune γ avec $v_n \leq \gamma \leq u_n$.

c) $H_{10} \approx 2{,}928968$; $u_{10} = H_{10} - \ln 10 \approx 0{,}626383$; $v_{10} = H_{10} - \ln 11 \approx 0{,}531073$. Donc $0{,}531 \leq \gamma \leq 0{,}627$ (en réalité $\gamma \approx 0{,}5772$).

d) $u_n \to \gamma$ s'écrit $H_n - \ln n = \gamma + o(1)$. C'est plus précis que $H_n \sim \ln n$: l'erreur commise en remplaçant H_n par $\ln n + \gamma$ tend vers 0.

Réponse. (u_n), (v_n) adjacentes ; $0{,}531 \leq \gamma \leq 0{,}627$; $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Correction de l'exercice 8 – Somme des inverses des carrés

a) $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)} \geq \dfrac{1}{k^2}$ car $k(k-1) \leq k^2$.

b) Télescopage :

$$S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

— (S_n) croît (termes positifs) et est majorée par 2 : elle converge vers $S \leq 2$.

c) Pour $m > n$, on somme de $k = n+1$ à m :

— $S_m - S_n \geq \sum\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{m+1}$;

— $S_m - S_n \leq \sum\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— On fait $m \to +\infty$: $\frac{1}{n+1} \le S - S_n \le \frac{1}{n}$.

d) $S_{10} \approx 1{,}549768$; donc $1{,}549768 + \frac{1}{11} \approx 1{,}6407 \le S \le 1{,}6498$. Et $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644934$ ✓.

Réponse. (S_n) converge, $\frac{1}{n+1} \le S - S_n \le \frac{1}{n}$; $1{,}6407 \le S \le 1{,}6498$, cohérent avec $\frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 9 – Somme des inverses des racines

a) Quantité conjuguée :

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \le \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

— et de même $2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \ge \frac{1}{\sqrt{k}}$.

b) On somme pour k de 1 à n (télescopage) : minorant $2\sqrt{n+1} - 2$. Pour le majorant, on garde le terme $k = 1$ à part : $S_n \le 1 + 2(\sqrt{n} - 1) = 2\sqrt{n} - 1$.

c) On divise par $2\sqrt{n}$: les deux bornes, $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$, tendent vers 1.
Gendarmes : $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

d) Bornes pour $n = 100$: $2\sqrt{101} - 2 \approx 18{,}0998$ et $2 \times 10 - 1 = 19$;
$18{,}0998 \le 18{,}5896 \le 19$ ✓.

Réponse. $2\sqrt{n+1} - 2 \le S_n \le 2\sqrt{n} - 1$, d'où $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Correction de l'exercice 10 – Sommes télescopiques

Dans chaque cas on écrit le terme général comme une différence $a_k - a_{k+1}$, et l'on utilise

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

a) $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$: $A_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$.

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$: $B_n = \ln(n+1) \to +\infty$.

c) $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$. Donc
$C_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \to \frac{1}{4}$.

d) $\frac{k+1}{2^{k-1}} - \frac{k+2}{2^k} = \frac{2(k+1) - (k+2)}{2^k} = \frac{k}{2^k}$ ✓. Avec $a_k = \frac{k+1}{2^{k-1}}$: $D_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \to 2$. Contrôle :
$D_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$ et $2 - \frac{4}{4} = 1$ ✓.

Réponse. $A_n \to 1$; $B_n = \ln(n+1) \to +\infty$; $C_n \to \frac{1}{4}$; $D_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \to 2$.

Correction de l'exercice 11 – Somme des inverses des coefficients binomiaux

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$: ces quatre termes valent $2 + \frac{2}{n}$.

b) $k \mapsto \binom{n}{k}$ croît jusqu'à $\frac{n}{2}$ puis décroît (quotient $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}$), et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: sur $[2, n-2]$, le minimum est atteint aux bords, où il vaut $\binom{n}{2}$.

c) Il reste $n - 3$ termes, chacun compris entre 0 et $\binom{n}{2}^{-1} = \frac{2}{n(n-1)}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$2 + \frac{2}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

— les deux bornes tendent vers 2 : $u_n \to 2$.

d) $n = 10$: bornes 2,2 et $2{,}2 + \frac{14}{90} \approx 2{,}356$, avec $u_{10} \approx 2{,}2746$ ✓. $n = 50$: $2{,}04 \leq 2{,}0417 \leq 2{,}04 + \frac{94}{2450} \approx 2{,}078$ ✓.

Réponse. $u_n = 2 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $u_n \to 2$.

Correction de l'exercice 12 – Du quotient à la racine n-ième

a) Posons $a_k = \ln u_{k+1} - \ln u_k = \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} \to \ln \ell$ (continuité de ln). Par **Césaro**, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \to \ln \ell$. Par télescopage :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{\ln u_n - \ln u_0}{n}$$

— donc $\frac{\ln u_n}{n} \to \ln \ell$ et $u_n^{1/n} = \exp \frac{\ln u_n}{n} \to \ell$.

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \to \mathrm{e}^{-1}$.

c) Le quotient tend vers $\frac{1}{\mathrm{e}} < 1$: à partir d'un rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q = \frac{1}{2}$ par exemple, donc $u_n \to 0$ géométriquement. Par a), $u_n^{1/n} = \frac{(n!)^{1/n}}{n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}$.

d) Valeurs cohérentes, avec une convergence lente (l'erreur relative décroît comme $\frac{\ln n}{n}$).

Réponse. $\frac{n!}{n^n} \to 0$ et $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Correction de l'exercice 13 – Encadrer ln(n!)

a) ln est croissante : sur $[k-1, k]$, $\ln t \leq \ln k$, et sur $[k, k+1]$, $\ln t \geq \ln k$. On intègre sur des intervalles de longueur 1.

b) Une primitive de ln est $t \ln t - t$. Minorant (somme de $k = 2$ à n, avec $\ln 1 = 0$) :

$$\ln(n!) \geq \int_1^n \ln t \, \mathrm{d}t = n \ln n - n + 1$$

— Majorant (somme de $k = 1$ à n) : $\ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln t \, \mathrm{d}t = (n+1)\ln(n+1) - n$.

c) On divise par $n \ln n$: minorant $1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \to 1$; majorant $\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{1}{\ln n} \to 1$ (car $\ln(n+1) \sim \ln n$). Gendarmes : $\ln(n!) \sim n \ln n$.

d) $n = 10$: $14{,}026 \leq 15{,}104 \leq 16{,}377$ ✓. $n = 100$: $361{,}517 \leq 363{,}739 \leq 366{,}127$ ✓.

Réponse. $n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$, donc $\ln(n!) \sim n \ln n$.

Correction de l'exercice 14 – Somme des puissances p-ièmes

a) $t \mapsto t^p$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\int_{k-1}^{k} t^p \, \mathrm{d}t \leq k^p \leq \int_k^{k+1} t^p \, \mathrm{d}t$$

b) En sommant de $k = 1$ à n : $\int_0^n t^p \, \mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_1^{n+1} t^p \, \mathrm{d}t \leq \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$. Le minorant vaut $\frac{n^{p+1}}{p+1}$. En divisant par $\frac{n^{p+1}}{p+1}$, les bornes sont 1 et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1} \to 1$: gendarmes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\frac{100\times 101\times 201}{6} = 338\,350$; $\frac{100^3}{3} \approx 333\,333$; $\frac{101^3}{3} \approx 343\,434$: l'encadrement est vérifié.

d) 338 350 cubes. L'approximation $\frac{n^3}{3}$ sous-estime de $\frac{338\,350 - 333\,333}{338\,350} \approx 1{,}5\,\%$: c'est de l'ordre de $\frac{3}{2n}$, le terme suivant du développement $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \cdots$.

Réponse. $\sum_{k=1}^{n} k^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$; 338 350 cubes, erreur de 1,5 % avec $\frac{n^3}{3}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : collectionner des vignettes

a) Il reste $n-k+1$ vignettes nouvelles sur n : chaque paquet en apporte une avec probabilité $p = \frac{n-k+1}{n}$. Le nombre moyen d'essais pour un premier succès est $\frac{1}{p}$. En sommant sur k de 1 à n :

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = nH_n$$

b) $E_n = n\ln n + \gamma n + o(n)$, donc $E_n \sim n\ln n$.

c) $50(\ln 50 + 0{,}5772) \approx 224{,}46$: erreur 0,5. Avec le terme $\frac{1}{2n}$: 224,46 + 0,5 = 224,96, quasi exact.

d) $E_{100} = 100H_{100} \approx 518{,}74$ paquets. Et $\frac{E_{100}}{E_{50}} \approx \frac{518{,}74}{224{,}96} \approx 2{,}31$: doubler l'album fait plus que doubler le coût, à cause du facteur $\ln n$ (les dernières vignettes sont les plus longues à obtenir : la dernière demande à elle seule n paquets en moyenne).

Réponse. $E_n = nH_n \sim n\ln n$; $E_{50} \approx 225$, $E_{100} \approx 519$ paquets.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).