Plaquette 2 – Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Point fixe : si $u_n \to \ell$ et f est continue en ℓ,

$$\ell = f(\ell)$$

— f croissante sur I stable : (u_n) monotone ; f décroissante : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) monotones de sens contraires.
— $|f| \leq k < 1$ sur I : $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.
— Signe de $f(x) - x$: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.
— **Équivalent** : si $v_{n+1} - v_n \to c \neq 0$, alors $v_n \sim cn$ (Césaro).

Correction de l'exercice 1 – Racines emboîtées

a) $x \in [0,2] \Rightarrow \sqrt{2+x} \in [\sqrt{2}, 2] \subset [0,2]$. f croissante et $u_1 = \sqrt{2} > u_0$: croissante.

b) Croissante majorée par 2 : $u_n \to \ell$ avec $\ell = \sqrt{2+\ell}$, $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, $\ell = 2$.

c) Récurrence : $u_0 = 0 = 2\cos\frac{\pi}{2}$ et

$$\sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

d) $2 - u_n = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \sim \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4^{n+1}}$.

Réponse. $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \to 2$, avec $2 - u_n \sim \frac{\pi^2}{4^{n+1}}$.

Correction de l'exercice 2 – Itérer le cosinus

a) cos est décroissante sur $[0,1] \subset [0,\pi]$, donc $\cos([0,1]) = [\cos 1, 1] \subset [0,1]$. La fonction $g(x) = \cos x - x$ est strictement décroissante ($g' = -\sin x - 1 < 0$ sur $]0,1[$), avec $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$: par le TVI et la stricte monotonie, g s'annule une seule fois, en α.

b) $f = \cos$ est décroissante sur $[0,1]$, donc $f \circ f$ est **croissante** : chacune des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), récurrente pour $f \circ f$, est monotone.

— $u_0 = 0 < u_2 = \cos 1 \approx 0{,}5403$: (u_{2n}) croît ; $u_1 = 1 > u_3 \approx 0{,}8576$: (u_{2n+1}) décroît.
— $u_0 \leq \alpha$ et f décroissante donnent $u_1 = f(u_0) \geq f(\alpha) = \alpha$, puis $u_2 \leq \alpha$, etc. : par récurrence $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.

c) Pour $n \geq 1$, $u_n = \cos u_{n-1} \in [\cos 1, 1]$. **Inégalité des accroissements finis** sur ce segment, où $|\cos'| = |\sin| \leq \sin 1$:

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\cos u_n - \cos\alpha| \leq \sin(1)\,|u_n - \alpha|$$

— donc $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^{n-1} |u_1 - \alpha| \to 0$ car $\sin 1 \approx 0{,}841 < 1$: $u_n \to \alpha$.

d) $u_1 = 1$; $u_2 \approx 0{,}540302$; $u_3 \approx 0{,}857553$; $u_4 \approx 0{,}654290$; $u_5 \approx 0{,}793480$; $u_6 \approx 0{,}701369$; $u_7 \approx 0{,}763960$; $u_8 \approx 0{,}722102$. D'après b), $u_8 \leq \alpha \leq u_7$: $0{,}722 \leq \alpha \leq 0{,}764$ (en fait $\alpha \approx 0{,}739085$). La convergence est lente : le facteur de contraction réel est $|\cos'(\alpha)| = \sin\alpha \approx 0{,}674$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $u_n \to \alpha \approx 0{,}7391$, unique solution de $\cos x = x$, en oscillant autour : $u_{2n} \le \alpha \le u_{2n+1}$.

Correction de l'exercice 3 – Suite logistique

a) $\max f_r = \frac{r}{4} \le 1$. Points fixes : 0 et $1 - \frac{1}{r}$ (si $r \ge 1$).

b) $f_r(x) \le rx \le x$: (u_n) décroissante positive ; sa limite est un point fixe dans $[0, 1[$: 0 (pour $r = 1$, $f(x) < x$ si $x > 0$).

c) Vers $1 - \frac{1}{r}$; pour $r = 2{,}5$, $\ell = 0{,}6$.

d) $f_r'(\ell) = r(1 - 2\ell) = 2 - r = -1{,}2$, de valeur absolue > 1 : point fixe **répulsif** (si u_n s'en approche, l'écart est multiplié par environ 1,2). Vérification :

$$3{,}2 \times 0{,}5130 \times 0{,}4870 \approx 0{,}7995, \qquad 3{,}2 \times 0{,}7995 \times 0{,}2005 \approx 0{,}5130$$

Réponse. $r \le 1$: 0 ; $1 < r \le 3$: $1 - \frac{1}{r}$; $r = 3{,}2$: 2-cycle $\{0{,}513; 0{,}799\}$.

Correction de l'exercice 4 – Équivalent de ln(1 + uₙ) itéré

a) $0 < \ln(1 + x) < x$ pour $x > 0$: décroissante, positive, limite ℓ avec $\ln(1 + \ell) = \ell$, donc $\ell = 0$.

b)

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

c) Césaro : $\frac{1}{u_n} \sim \frac{n}{2}$.

d) $\frac{2}{100} = 0{,}02$ (écart 0,7 %) ; $\frac{2}{10\,000} = 0{,}0002$ ✓.

Réponse. $u_n \sim \frac{2}{n}$.

Correction de l'exercice 5 – La suite uₙ + 1/uₙ

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$. Si $u_n \to \ell$ fini, $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$: impossible. Croissante sans limite finie : $+\infty$.

b)

$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$$

En sommant ces égalités de $k = 0$ à $n - 1$ (télescopage) et avec $u_0^2 = 1$, on obtient la formule annoncée.

c) Tous les termes de la somme sont positifs, donc $u_n^2 \ge 1 + 2n$. Par suite $\frac{1}{u_k^2} \le \frac{1}{2k+1}$ et, en comparant la somme harmonique à ln :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \le 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \le 1 + \frac{1 + \ln n}{2} = o(n)$$

— donc $u_n^2 = 2n + o(n)$, soit $u_n^2 \sim 2n$ et, la racine carrée conservant les équivalents, $u_n \sim \sqrt{2n}$.

d) $\sqrt{200} \approx 14{,}142$, $\sqrt{20\,000} \approx 141{,}421$: l'écart relatif, dû au terme en $\ln n$, décroît ✓.

Réponse. $u_n \sim \sqrt{2n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Convergence lente vers 0

a) Sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$, $x-x^2\in\left]0,\frac{1}{4}\right]$: stable ; $u_{n+1}-u_n=-u_n^2<0$; limite $\ell=\ell-\ell^2$, $\ell=0$.

b)

$$\frac{1}{u_n(1-u_n)}-\frac{1}{u_n}=\frac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)}=\frac{1}{1-u_n}$$

c) Le membre de droite tend vers 1 : $\frac{1}{u_n}\sim n$. Plus finement $\frac{1}{1-u_n}=1+u_n+O(u_n^2)=1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, et la somme des $\frac{1}{k}$ donne le terme $\ln n$.

d) $\frac{1}{u_{100}}\approx 106{,}4\approx 100+\ln 100+1{,}8$ ✓ ; $\frac{1}{u_{10\,000}}\approx 10\,011$.

Réponse. $u_n\sim\frac{1}{n}$, et même $\frac{1}{u_n}=n+\ln n+O(1)$.

Correction de l’exercice 7 – Récurrence homographique

a) $f(x)=1+\frac{1}{x+1}\geq 1$. $x^2+x=x+2$: $\ell=\sqrt{2}$.

b) $u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(1-\sqrt{2})u_n+2-\sqrt{2}}{u_n+1}=\frac{(1-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2})}{u_n+1}$ et de même $u_{n+1}+\sqrt{2}=\frac{(1+\sqrt{2})(u_n+\sqrt{2})}{u_n+1}$:

$$v_{n+1}=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}v_n=-(3-2\sqrt{2})v_n$$

c) $|q|=3-2\sqrt{2}\approx 0{,}17<1$: $v_n\to 0$, $u_n=\sqrt{2}\,\frac{1+v_n}{1-v_n}\to\sqrt{2}$.

d) $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}\approx 1{,}414286$: réduites de $\sqrt{2}$, alternativement par excès et par défaut.

Réponse. $v_n=\frac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}$ géométrique de raison $-(3-2\sqrt{2})$; $u_n\to\sqrt{2}$.

Correction de l’exercice 8 – Selon la valeur initiale

a) $u_n=u_0^{2^n}$: $\to 0$ si $|u_0|<1$, vaut 1 si $|u_0|=1$ ($n\geq 1$), $\to+\infty$ si $|u_0|>1$.

b) $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, nul seulement en $\frac{1}{2}$.

c) (w_n) est croissante (dès $n=1$, $w_n\geq 0$). Si $|w_0|\leq\frac{1}{2}$: $w_n\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (stable), croissante majorée, limite point fixe $\frac{1}{2}$. Si $|w_0|>\frac{1}{2}$: $w_1>\frac{1}{2}$ et une limite finie serait un point fixe $>\frac{1}{2}$: impossible, donc $w_n\to+\infty$.

d) $e_n=\frac{1}{2}-w_n$ vérifie $e_{n+1}=e_n-e_n^2$:

$$\frac{1}{2}-w_{n+1}=\frac{1}{4}-w_n^2=\left(\frac{1}{2}-w_n\right)\left(\frac{1}{2}+w_n\right)=e_n(1-e_n)$$

— c’est l’exercice précédent : $e_n\sim\frac{1}{n}$.

Réponse. $w_{n+1}=w_n^2+\frac{1}{4}$ converge (vers $\frac{1}{2}$) si et seulement si $|w_0|\leq\frac{1}{2}$, lentement ($\sim\frac{1}{n}$).

Correction de l’exercice 9 – Méthode de Héron généralisée

a) $u_{n+1}\geq\sqrt{u_n\cdot\frac{a}{u_n}}=\sqrt{a}$ (IAG). $u_{n+1}-u_n=\frac{a-u_n^2}{2u_n}\leq 0$ pour $n\geq 1$.

b) $\frac{u_n^2+a-2\sqrt{a}\,u_n}{2u_n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) De même $u_{n+1}+\sqrt{a}=\dfrac{(u_n+\sqrt{a})^2}{2u_n}$; le quotient q_n vérifie $q_{n+1}=q_n^2$, donc

$$\frac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}}=q_0^{2^n}$$

d) $u_1=\dfrac{19}{6}\approx 3{,}16667$, $u_2=\dfrac{721}{228}\approx 3{,}162281$, $u_3\approx 3{,}16227766$ ($\sqrt{10}\approx 3{,}16227766$).

Réponse. $\dfrac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}}=\left(\dfrac{u_0-\sqrt{a}}{u_0+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$: convergence quadratique.

Correction de l’exercice 10 – Un 2-cycle et la divergence

a) $x\in[0,1]\Rightarrow 1-x^2\in[0,1]$. $x^2+x-1=0$: $\ell=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618$.

b) $f(f(x))-x=1-(1-x^2)^2-x=-x^4+2x^2-x=-x(x-1)(x^2+x-1)$: racines 0, 1, ℓ, $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) $0,1,0,1,\ldots$: 2-cycle. Depuis 0,5 : 0,75 ; 0,4375 ; 0,8086 ; 0,3462 ; 0,8802 ; 0,2253 : les termes pairs et impairs s’éloignent de ℓ et approchent le cycle $\{0,1\}$.

d)

$$|f'(\ell)|=2\ell=\sqrt{5}-1\approx 1{,}236>1$$

— point fixe **répulsif** : la suite ne converge vers ℓ que si elle l’atteint exactement.

Réponse. Point fixe $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ répulsif ; les suites extraites tendent vers le 2-cycle $\{0,1\}$.

Correction de l’exercice 11 – Exponentielle itérée

a) $f(x)=\sqrt{2}^{x}$ croissante, $u_1=\sqrt{2}>1=u_0$: croissante. Si $u_n\le 2$, $u_{n+1}\le\sqrt{2}^2=2$. Limite : point fixe dans $[1,2]$, donc 2.

b) $\sqrt{2}^2=2$, $\sqrt{2}^4=4$. La suite reste dans $[1,2]$ (intervalle stable) : elle ne peut pas atteindre 4.

c) $2^x>x$ pour tout x : suite croissante, pas de point fixe, donc $u_n\to+\infty$ ($1,2,4,16,65\,536,\ldots$).

d) $\sqrt{2}\approx 1{,}4142\le 1{,}4447$ ✓.

Réponse. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}=2$; pour $a=2$, divergence vers $+\infty$.

Correction de l’exercice 12 – Nombre d’or par fraction continue

a) $x\in[1,2]\Rightarrow 1+\frac{1}{x}\in\left[\frac{3}{2},2\right]$. $f'=-\dfrac{1}{x^2}<0$.

b) $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618$ ($\varphi^2=\varphi+1$). Et

$$u_{n+1}-\varphi=\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\varphi}=-\frac{u_n-\varphi}{u_n\varphi}$$

— avec $u_n\ge 1$.

c) $|u_n-\varphi|\le\varphi^{-n}|u_0-\varphi|\to 0$ (et en fait plus vite, car $u_n\ge\frac{3}{2}$ pour $n\ge 1$).

d) 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}\approx 1{,}6154$: quotients de Fibonacci consécutifs.

Réponse. $u_n=\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\to\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Lire une suite sur un graphique

a) $f(x) - x = \frac{x^2 - 3x + 2}{3} = \frac{(x-1)(x-2)}{3}$: points fixes 1 et 2 ; positif hors de $[1, 2]$.

b) f croissante sur $\mathbb{R}_+$. $u_0 \in [0, 1[$: croissante, majorée par 1, limite 1. $u_0 \in]1, 2[$: décroissante, minorée par 1, limite 1. $u_0 = 1$ ou 2 : constante. $u_0 > 2$: croissante, pas de point fixe au-delà : $+\infty$.

c)

$$f'(1) = \frac{2}{3} < 1 \text{ (attractif)}, \qquad f'(2) = \frac{4}{3} > 1 \text{ (répulsif)}$$

d) Près de 1, l'erreur est multipliée par environ $\frac{2}{3}$ à chaque pas : l'estimation $\frac{\ln(10^{-3}/0{,}9)}{\ln(2/3)} \approx 17$ est optimiste, car au départ, près de 2 (point répulsif), la suite s'éloigne très lentement. Le calcul donne en fait 25 termes.

Réponse. Limite 1 si $0 \leq u_0 < 2$, $+\infty$ si $u_0 > 2$; 1 attractif, 2 répulsif.

Correction de l'exercice 14 – Équation de Kepler

a) $g(E) = E - e\sin E$: $g' = 1 - e\cos E \geq 1 - e > 0$, limites $\pm\infty$: bijection.

b) $E_{n+1} - E = e(\sin E_n - \sin E)$ et $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$.

c) $E_1 = 1 + 0{,}2\sin 1 \approx 1{,}16829$, $E_2 \approx 1{,}18402$, $E_3 \approx 1{,}18523$, $E_4 \approx 1{,}18532$.

d) $|E_0 - E| \leq e$ (car $|E - M| = e|\sin E| \leq e$), donc $|E_n - E| \leq e^{n+1}$:

$$0{,}2^{n+1} \leq 10^{-8} \Leftrightarrow n + 1 \geq \frac{8\ln 10}{\ln 5} \approx 11{,}4$$

— soit $n = 11$.

Réponse. Contraction de rapport e ; $E \approx 1{,}1853$ pour $e = 0{,}2$, $M = 1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une récurrence à paramètre

a) ℓ_a est la racine positive de $x^2 = a + x$. Si $u_n \leq \ell_a$, $u_{n+1} \leq \sqrt{a + \ell_a} = \ell_a$. Croissance : $u_1 = \sqrt{a} > 0$ et f croissante.

b) Limite : point fixe positif, ℓ_a.

c) $\ell_a = k$ entier $\Leftrightarrow a = k^2 - k$: $a \in \{2, 6, 12, 20, \ldots\}$ ($\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}} = 2$, $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots}} = 3$).

d) $\ell_a - u_{n+1} = \sqrt{a + \ell_a} - \sqrt{a + u_n} = \frac{\ell_a - u_n}{\ell_a + u_{n+1}}$:

$$0 \leq \ell_a - u_n \leq \frac{\ell_a}{\ell_a^n}$$

— convergence géométrique de raison $\frac{1}{\ell_a}$.

Réponse. $u_n \to \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$; limite entière k pour $a = k(k-1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).