Plaquette 1 – Convergence, monotonie, suites récurrentes et suites adjacentes

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On démontre une convergence par **encadrement**, par **monotonie + bornitude**, ou par l'étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$; on sait aussi traiter les suites récurrentes linéaires et les suites adjacentes.

Exercice 1 – Limite par encadrement

Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 2 – Monotonie et convergence

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

a) Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) En déduire sa limite.

Exercice 3 – Suite arithmético-géométrique

Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$. Donner l'expression de u_n puis sa limite.

Exercice 4 – Récurrence linéaire d'ordre 2

Soit $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Exprimer u_n.

Exercice 5 – Racine double

Soit $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. Exprimer u_n.

Exercice 6 – Suite divergente

Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ ne converge pas.

Exercice 7 – Gendarmes avec une somme

Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2 + k}$.

Exercice 8 – Suites adjacentes

Soient $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$ pour $n \geq 1$.

Montrer que ces suites sont adjacentes (on admettra la décroissance de (v_n)) et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

donner un encadrement de e à l'ordre $n = 4$.

Exercice 9 – Point fixe et fonction décroissante

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

a) Montrer que $u_n \in [0\,;1]$ pour tout n.

b) Quelle est la seule limite possible ?

Exercice 10 – Croissances comparées

Déterminer les limites de :

a) $\dfrac{n^{10}}{2^n}$

b) $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

c) $n^{1/n}$

Exercice 11 – Césaro

Soit (u_n) convergeant vers ℓ. Montrer que la moyenne $v_n = \dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$ converge aussi vers ℓ. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 12 – Bolzano-Weierstrass

Soit $u_n = \sin n$. Justifier que (u_n) admet une sous-suite convergente, sans calculer sa limite.

Exercice 13 – Synthèse : vitesse de convergence

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

a) Montrer que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n.

b) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$.

c) Conclure sur la limite.

Exercice 14 – Itérer le sinus

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

a) Montrer que (u_n) est décroissante et positive, donc convergente, et que sa limite est 0.

b) Montrer que $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} \to \dfrac{1}{3}$ (utiliser $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$).

c) En déduire par Césaro que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

d) Comparer $u_{100} \approx 0{,}1689$ et $u_{1000} \approx 0{,}05459$ avec $\sqrt{3/n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Moyenne arithmético-géométrique

Soient $0 < a_0 < b_0$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

a) Montrer que $a_n \leq b_n$ pour tout n (IAG).

b) Montrer que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.

c) Montrer que $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{b_n - a_n}{2}$ et conclure que les suites sont adjacentes.

d) Calculer les premiers termes pour $a_0 = 1$, $b_0 = 2$; que remarquez-vous sur la vitesse ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).