Plaquette 3 – Définition de la limite, opérations et suites extraites

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Revenir à la **définition quantifiée** quand aucun théorème ne s'applique : on part de $|u_n - \ell|$, on le **majore** par une expression simple qui tend vers 0, puis on choisit le rang N. Pour prouver une **divergence**, on nie la définition (les quantificateurs s'échangent) ou l'on exhibe **deux suites extraites** de limites différentes. Pour prouver une **convergence** par morceaux, on recolle les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Exercice 1 – Retour à la définition

Soit $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$.

a) Montrer, **avec la définition**, que $u_n \to 3$: pour $\varepsilon > 0$, expliciter un rang N.

b) À partir de quel rang a-t-on $|u_n - 3| \leq 10^{-3}$?

c) Pourquoi le rang N trouvé en a) n'a-t-il pas besoin d'être le plus petit possible ?

Exercice 2 – Tendre vers l'infini : majorer grossièrement

Soit $u_n = n^2 - 10n$.

a) Montrer que $u_n \geq \frac{n^2}{2}$ pour $n \geq 20$.

b) En déduire, avec la définition, que $u_n \to +\infty$: pour $A > 0$, donner un rang N explicite.

c) Pour $A = 10^6$, comparer le rang de b) au plus petit rang n tel que $u_n \geq 10^6$.

Exercice 3 – Nier la convergence

a) Écrire avec des quantificateurs « (u_n) ne converge pas vers ℓ », puis « (u_n) n'est pas majorée ».

b) Soit $u_n = \cos\frac{n\pi}{3}$. Montrer, avec a) et $\varepsilon = \frac{1}{4}$, que (u_n) ne converge pas vers $\frac{1}{2}$.

c) Montrer que (u_n) ne converge vers **aucun** réel.

d) La suite $v_n = n\cos(n\pi)$ est-elle majorée ? minorée ? Tend-elle vers $+\infty$?

Exercice 4 – Bornée fois tend vers 0

a) Démontrer, avec la définition : si (a_n) est bornée et $b_n \to 0$, alors $a_n b_n \to 0$.

b) En déduire les limites de $u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$ et $v_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

c) Montrer par un contre-exemple qu'une suite bornée multipliée par une suite qui tend vers 1 ne converge pas forcément.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Limite strictement positive

a) Soit $u_n \to \ell > 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

b) En déduire que si $u_n \to \ell > 0$, la suite $\ln u_n$ est définie à partir d'un certain rang.

c) On suppose $u_n > 0$ pour tout n et $u_n \to \ell$. A-t-on $\ell > 0$? Justifier par un exemple.

d) Soit (u_n) à valeurs dans $\mathbb{Z}$, convergente. Montrer qu'elle est **stationnaire**.

Exercice 6 – Formes indéterminées : contre-exemples

Trouver, dans chaque cas, des suites (u_n) et (v_n) qui conviennent.

a) $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to c$, où $c \in \mathbb{R}$ est donné.

b) $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $u_n + v_n$ n'a pas de limite.

c) $u_n \to 0$, $v_n \to +\infty$ et $u_n v_n \to +\infty$; puis $u_n v_n \to 0$.

d) (u_n) et (v_n) divergentes, $u_n + v_n$ et $u_n v_n$ convergentes.

Exercice 7 – Recoller les termes pairs et impairs

a) Montrer que si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.

b) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

c) En déduire que (S_n) converge. On admet que sa limite est $\ln 2$.

d) Calculer S_{10} et S_{11} et encadrer $\ln 2$.

Exercice 8 – Trois suites extraites

Soit (u_n) telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.

a) Montrer que (u_{6n}) est extraite à la fois de (u_{2n}) et de (u_{3n}).

b) Trouver de même une suite extraite commune à (u_{2n+1}) et (u_{3n}).

c) En déduire que (u_n) converge.

d) Montrer que la convergence de (u_{2n}) et (u_{3n}) seules ne suffit pas.

Exercice 9 – Valeurs d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de (u_n) toute limite d'une suite extraite.

a) Déterminer les valeurs d'adhérence de $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ et de $v_n = \cos\frac{2n\pi}{3}$.

b) Montrer qu'une suite convergente a une **unique** valeur d'adhérence.

c) La suite $w_n = n^{(-1)^n}$ a-t-elle une valeur d'adhérence ? Converge-t-elle ?

d) Montrer qu'une suite **bornée** ayant une unique valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ (raisonner par l'absurde avec Bolzano-Weierstrass).

Exercice 10 – Approcher un réel par des rationnels

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $x - 10^{-n} < u_n \leq x$ et que $u_n \in \mathbb{Q}$.

b) En déduire que $u_n \to x$: tout réel est limite d'une suite de rationnels.

c) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 pour $x = \sqrt{2}$.

d) Montrer de même que tout réel est limite d'une suite d'**irrationnels** (utiliser $u_n + \frac{\sqrt{2}}{n}$).

Exercice 11 – Borne supérieure et suites

a) Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée, et s un majorant de A. Montrer : $s = \sup A$ si et seulement s'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers s.

b) Déterminer $\sup A$ pour $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2},\ n \geq 1 \right\}$. Est-ce un maximum ?

c) Soit $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Montrer que $\sup B = \sqrt{2}$ et que ce n'est pas un maximum.

Exercice 12 – Des écarts qui tendent vers 0 ne suffisent pas

a) Donner deux suites (u_n) telles que $u_{n+1} - u_n \to 0$ et $u_n \to +\infty$.

b) Soit $u_n = \sin\sqrt{n}$. Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$ (utiliser $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$).

c) On pose $n_k = \left\lfloor \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 \right\rfloor$. Montrer que $\sqrt{n_k} - \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \to 0$, puis que $u_{n_k} \to 1$.

d) Conclure que (u_n) diverge.

Exercice 13 – Un produit infini

Soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

a) Montrer que (P_n) est croissante.

b) Montrer que $\ln P_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1$ (utiliser $\ln(1+x) \leq x$).

c) En déduire que (P_n) converge vers une limite $P \in [\frac{3}{2}, \mathrm{e}]$.

d) Calculer P_{10} (on admet $P \approx 2{,}3842$).

Exercice 14 – Les formes 1 puissance infini

a) Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$ en passant par le logarithme.

b) Plus généralement, montrer que $(1 + \frac{x}{n})^n \to \mathrm{e}^x$ pour tout réel x.

c) Déterminer les limites de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ et $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

d) Calculer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour $n = 10, 100, 1000$: la convergence est-elle rapide ?

Exercice 15 – Synthèse : une somme qui tend vers ln 2

Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que (u_n) est croissante.

b) Montrer que, pour $k \geq 2$, $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$ (comparer à une intégrale).

c) En déduire que $\ln \frac{2n+1}{n+1} \leq u_n \leq \ln 2$, puis la limite de (u_n).

d) Calculer u_{10} et vérifier l'encadrement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).