Plaquette 5 – Suites complexes, récurrences linéaires et modélisation

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Une **suite complexe** converge si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent ; pour une suite géométrique q^n, tout se lit sur $|q|$. Une **récurrence linéaire** d'ordre p se résout par son **équation caractéristique** (racines complexes conjuguées $\rho\,\mathrm{e}^{\pm i\theta} \Rightarrow \rho^n(\lambda\cos n\theta + \mu\sin n\theta)$), un second membre par une **solution particulière**. Deux suites **couplées** se découplent en cherchant une combinaison **invariante** et une combinaison **géométrique**. En modélisation, on écrit la récurrence, on cherche le **point fixe**, puis l'écart au point fixe.

Exercice 1 – Spirale vers un point fixe

Un robot se déplace dans le plan complexe : sa position z_{n+1} se déduit de z_n par $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n + 1$, avec $z_0 = 0$.

a) Déterminer le point fixe ω de cette transformation.

b) Montrer que $z_n - \omega = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n (z_0 - \omega)$.

c) Écrire $\frac{1+i}{2}$ sous forme exponentielle et décrire géométriquement le mouvement.

d) Calculer z_8 et la distance $|z_8 - \omega|$. À partir de quel rang le robot est-il à moins de 10^{-3} de ω ?

Exercice 2 – Limite d'une suite complexe

Soit $z_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$ pour $n \geq 1$.

a) Calculer le module de z_n et montrer qu'il tend vers 1.

b) Montrer qu'un argument de z_n est $\theta_n = n \arctan\frac{1}{n}$ et que $\theta_n \to 1$.

c) En déduire que $z_n \to \mathrm{e}^{i}$.

d) Comparer $z_{10} \approx 0{,}5708 + 0{,}8825\,i$ et $z_{100} \approx 0{,}5430 + 0{,}8457\,i$ à e^{i}.

Exercice 3 – Une récurrence périodique

Soit $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

a) Calculer $u_0, \ldots, u_7$. Que constate-t-on ?

b) Résoudre l'équation caractéristique et écrire ses racines sous forme exponentielle.

c) En déduire $u_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{n\pi}{3}$.

d) Démontrer directement la périodicité en calculant u_{n+3} en fonction de u_n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Racines complexes de module √2

Soit $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

a) Résoudre l'équation caractéristique ; mettre les racines sous forme exponentielle.

b) En déduire $u_n = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$.

c) Vérifier sur u_2, u_3, u_4 calculés par la récurrence.

d) Calculer u_{8k} et u_{8k+4}. La suite est-elle bornée ? A-t-elle une limite ?

Exercice 5 – Stabilité selon un paramètre

Soit $c \in \mathbb{R}^*$ et la récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} - cu_n$.

a) Montrer que toutes les solutions tendent vers 0 si et seulement si les deux racines de $r^2 - r + c$ sont de module < 1.

b) Traiter le cas $c \le \frac{1}{4}$ (racines réelles).

c) Traiter le cas $c > \frac{1}{4}$ (racines complexes conjuguées ; utiliser leur produit).

d) Conclure : pour quelles valeurs de c toutes les solutions tendent-elles vers 0 ? Décrire le comportement pour $c = \frac{1}{2}$ et pour $c = 1$.

Exercice 6 – Récurrence avec second membre

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + n$.

a) Chercher une solution particulière de la forme $p_n = an + b$.

b) En déduire l'expression de u_n.

c) Vérifier sur u_1, u_2, u_3 calculés par la récurrence.

d) Donner un équivalent de u_n et la limite de $\frac{u_n}{2^n}$.

Exercice 7 – Récurrence d'ordre 3

Soit $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

a) Factoriser $r^3 - 2r^2 - r + 2$.

b) On admet que $u_n = a + b(-1)^n + c\,2^n$. Déterminer a, b, c.

c) Vérifier sur u_3 et u_4.

d) Donner un équivalent de u_n.

Exercice 8 – Changement de variable logarithmique

Soit $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout n et poser $v_n = \ln u_n$. Quelle récurrence vérifie (v_n) ?

b) Résoudre cette récurrence linéaire.

c) En déduire la limite de (u_n).

d) Calculer $u_2, \dots, u_5$ et comparer à la limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Deux suites couplées

Soit $u_0 = 1$, $v_0 = 10$ et, pour tout n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

a) Montrer que $w_n = v_n - u_n$ est géométrique.

b) Montrer que $u_n + 2v_n$ est constante.

c) En déduire les expressions de u_n et v_n, puis leur limite commune.

d) Montrer que les suites sont adjacentes et donner le premier rang où $w_n < 10^{-6}$.

Exercice 10 – Moyenne arithmético-harmonique

Soit $0 < a_0 < b_0$ et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$.

a) Montrer que $a_n b_n = a_0 b_0$ pour tout n.

b) Montrer que $b_n \le a_n$ pour $n \ge 1$ (comparer moyennes arithmétique et harmonique).

c) Montrer que $(a_n)_{n\ge 1}$ décroît, $(b_n)_{n\ge 1}$ croît, et $0 \le a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{(a_n - b_n)^2}{4b_1}$ pour $n \ge 1$.

d) En déduire la limite commune. Calculer les premiers termes pour $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

Exercice 11 – Moyenner un complexe et son module

Soit $z_0 = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$, $\theta \in]0, \pi[$, et $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

a) Montrer que si $z_n = r_n \mathrm{e}^{i\theta_n}$, alors $z_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2}\,\mathrm{e}^{i\theta_n/2}$ (factoriser par l'angle moitié).

b) En déduire $\theta_n = \frac{\theta}{2^n}$ et $r_n = r\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k}$.

c) Montrer que $\sin\theta = 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}$, puis que $r_n \to \frac{r\sin\theta}{\theta}$.

d) En déduire la limite de (z_n). Application : $z_0 = i$.

Exercice 12 – Fibonacci : formule de Binet et pavages

Soit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

a) Établir la formule de Binet $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$, avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b) En déduire $F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, et que F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

c) Montrer l'identité de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ (par récurrence).

d) On pave une bande $2 \times n$ avec des dominos 2×1. Montrer que le nombre T_n de pavages vérifie $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ et que $T_n = F_{n+1}$. Combien de pavages pour $n = 10$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Rembourser un emprunt

On emprunte $C = 150\,000$ € au taux mensuel $t = 0{,}3\,\%$, remboursé par mensualités constantes M pendant $N = 240$ mois. Soit R_n le capital restant dû après n mensualités : $R_0 = C$ et $R_{n+1} = (1+t)R_n - M$.

a) Déterminer le point fixe ρ et exprimer R_n.

b) En déduire la formule de la mensualité M (condition $R_N = 0$) et la calculer.

c) Calculer le coût total des intérêts.

d) Quel capital reste-t-il dû à mi-parcours ($n = 120$) ? Commenter.

Exercice 14 – Météo à deux états

Chaque jour est sec ou pluvieux. S'il fait sec, le lendemain est sec avec probabilité 0,9 ; s'il pleut, le lendemain est sec avec probabilité 0,3. Soit p_n la probabilité que le jour n soit sec, avec $p_0 = 0$.

a) Montrer, par la formule des probabilités totales, que $p_{n+1} = 0{,}6\,p_n + 0{,}3$.

b) En déduire p_n et sa limite.

c) Calculer $p_1, \dots, p_5$.

d) Au bout de combien de jours p_n est-il à moins de 0,01 de sa limite ? La limite dépend-elle de p_0 ?

Exercice 15 – Synthèse : soutenabilité d'une dette publique

La dette D_n d'un État croît au taux d'intérêt r et diminue de l'excédent budgétaire S_n ; le PIB P_n croît au taux g. On pose $d_n = \dfrac{D_n}{P_n}$ (dette en part du PIB) et l'on suppose un excédent constant en part du PIB : $S_n = sP_{n+1}$. On admet $d_{n+1} = qd_n - s$ avec $q = \dfrac{1+r}{1+g}$.

a) Établir cette relation à partir de $D_{n+1} = (1+r)D_n - S_n$ et $P_{n+1} = (1+g)P_n$.

b) On suppose $s = 0$. Discuter le comportement de (d_n) selon le signe de $r - g$.

c) On prend $r = 2\,\%$, $g = 3\,\%$, $s = 1\,\%$, $d_0 = 1{,}1$ (110 % du PIB). Exprimer d_n et sa limite.

d) Au bout de combien d'années la dette passe-t-elle sous 60 % du PIB ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).