Plaquette 4 – Suites définies implicitement et suites de sommes

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Suite implicite x_n = unique solution de $f_n(x) = 0$: (1) existence et unicité par le **théorème de la bijection** (continuité + stricte monotonie) ; (2) monotonie de (x_n) en calculant le **signe de** $f_{n+1}(x_n)$; (3) limite par l'absurde ou par encadrement ; (4) développement en **réinjectant** l'équation. **Suite de sommes** $S_n = \sum u_k$: télescopage, encadrement de chaque terme, ou **comparaison à une intégrale** quand $u_k = f(k)$ avec f monotone.

Exercice 1 – La racine de $x^n + x = 1$

Pour $n \geq 1$, soit $f_n(x) = x^n + x - 1$.

a) Montrer que f_n s'annule en un unique point $x_n \in [0, 1]$.

b) Calculer $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire que (x_n) est strictement croissante.

c) Montrer que $x_n \to 1$ (raisonner par l'absurde).

d) Calculer x_1 et x_2 exactement, puis vérifier que $x_{10} \approx 0{,}8351$.

Exercice 2 – Les solutions de $\tan x = x$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que $x_n = n\pi + \arctan x_n$ et en déduire $x_n \sim n\pi$.

c) Montrer que $x_n - n\pi \to \frac{\pi}{2}$.

d) En utilisant $\arctan y = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{y}$ pour $y > 0$, montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Comparer à $x_1 \approx 4{,}4934$ et $x_{10} \approx 32{,}9564$.

Exercice 3 – Racine d'une cubique à paramètre

Pour $n \geq 1$, on considère l'équation $x^3 + nx - 1 = 0$.

a) Montrer qu'elle admet une unique solution réelle x_n, et que $0 < x_n < \frac{1}{n}$.

b) En déduire $x_n \to 0$ et $x_n \sim \frac{1}{n}$.

c) Montrer que $\frac{1}{n} - x_n = \frac{x_n^3}{n}$, puis que $\frac{1}{n} - x_n \sim \frac{1}{n^4}$.

d) Vérifier numériquement avec $x_{10} \approx 0{,}0999003$.

Exercice 4 – Développement de la solution de $\ln x + x = n$

a) Montrer que l'équation $\ln x + x = n$ a une unique solution $x_n > 0$, et que (x_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $x_n \leq n$ pour $n \geq 1$, puis que $x_n \sim n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que $x_n = n - \ln n + o(1)$ (écrire $x_n = n - \ln x_n$ et $\ln x_n = \ln n + \ln \frac{x_n}{n}$).

d) Comparer à $x_{10} \approx 7{,}9294$ et $x_{1000} \approx 993{,}0992$.

Exercice 5 – Racine d'une somme géométrique

Pour $n \geq 2$, soit $P_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$.

a) Montrer que $P_n(x) = 1$ a une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

b) Montrer que (x_n) est décroissante (signe de $P_{n+1}(x_n) - 1$).

c) Montrer que $2x_n - 1 = x_n^{n+1}$ (utiliser la formule de la somme géométrique).

d) En déduire que $x_n \to \frac{1}{2}$. Vérifier avec x_2, $x_5 \approx 0{,}50866$, $x_{10} \approx 0{,}500245$.

Exercice 6 – Divergence de la série harmonique

Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ et en déduire que (H_n) n'est pas convergente, puis que $H_n \to +\infty$.

b) Par comparaison à une intégrale, montrer que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

c) En déduire $H_n \sim \ln n$.

d) Combien faut-il de termes pour que H_n dépasse 10 ? (utiliser $H_n \approx \ln n + 0{,}5772$)

Exercice 7 – La constante d'Euler

Soit $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$, avec $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante (utiliser $\ln(1+x) \leq x$).

b) En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note γ leur limite commune.

c) Calculer u_{10} et v_{10} et encadrer γ.

d) En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 8 – Somme des inverses des carrés

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \geq 2$.

b) En déduire que $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et que (S_n) converge vers une limite $S \leq 2$.

c) Montrer de même, avec $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, que $S - S_n \geq \frac{1}{n+1}$, et, avec a), que $S - S_n \leq \frac{1}{n}$.

d) Calculer S_{10} et encadrer S. On admet $S = \frac{\pi^2}{6}$: vérifier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Somme des inverses des racines

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Montrer que $2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \le \frac{1}{\sqrt{k}} \le 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$ pour $k \ge 1$.

b) En déduire $2\sqrt{n+1} - 2 \le S_n \le 2\sqrt{n} - 1$.

c) En déduire $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

d) Vérifier pour $n = 100$: $S_{100} \approx 18{,}5896$.

Exercice 10 – Sommes télescopiques

Calculer les sommes suivantes et leurs limites.

a) $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

b) $B_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

c) $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (décomposer $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$).

d) $D_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ (vérifier que $\frac{k}{2^k} = \frac{k+1}{2^{k-1}} - \frac{k+2}{2^k}$).

Exercice 11 – Somme des inverses des coefficients binomiaux

Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$ pour $n \ge 4$.

a) Isoler les termes $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

b) Montrer que $\binom{n}{k} \ge \binom{n}{2}$ pour $2 \le k \le n-2$.

c) En déduire $2 + \frac{2}{n} \le u_n \le 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$, puis la limite de (u_n).

d) Vérifier avec $u_{10} \approx 2{,}2746$ et $u_{50} \approx 2{,}0417$.

Exercice 12 – Du quotient à la racine n-ième

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell > 0$.

a) En appliquant le théorème de Césaro à $\ln u_{k+1} - \ln u_k$, montrer que $u_n^{1/n} \to \ell$.

b) Application : $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et sa limite.

c) En déduire que $u_n \to 0$ et que $\frac{(n!)^{1/n}}{n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}$.

d) Vérifier avec $\frac{(10!)^{1/10}}{10} \approx 0{,}4529$ et $\frac{(100!)^{1/100}}{100} \approx 0{,}3799$ ($\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}3679$).

Exercice 13 – Encadrer ln(n!)

a) Montrer que pour $k \ge 1$: $\int_{k-1}^{k} \ln t \, \mathrm{d}t \le \ln k \le \int_{k}^{k+1} \ln t \, \mathrm{d}t$ (pour $k = 1$, l'intégrale de gauche est prise sur $]0, 1]$).

b) En déduire $n \ln n - n + 1 \le \ln(n!) \le (n+1)\ln(n+1) - n$ (sommer de $k = 2$ à n à gauche, de 1 à n à droite).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire $\ln(n!) \sim n\ln n$.

d) Vérifier pour $n = 10$ ($\ln(10!) \approx 15{,}1044$) et $n = 100$ ($\ln(100!) \approx 363{,}739$).

Exercice 14 – Somme des puissances p-ièmes

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

a) Encadrer k^p par deux intégrales de $t \mapsto t^p$.

b) En déduire $\frac{n^{p+1}}{p+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$ et $S_n \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

c) Vérifier pour $p = 2$, $n = 100$ avec la formule exacte $\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

d) Application : un escalier de 100 marches cubiques empilées (la k-ième colonne compte k^2 cubes). Combien de cubes environ, et quelle erreur relative en prenant $\frac{n^3}{3}$?

Exercice 15 – Synthèse : collectionner des vignettes

Un album compte n vignettes différentes, et chaque paquet contient une vignette au hasard, toutes équiprobables. On admet que le nombre moyen de paquets à acheter pour compléter l'album est $E_n = nH_n$, où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Justifier intuitivement : quand on possède déjà $k-1$ vignettes, il faut en moyenne $\frac{n}{n-k+1}$ paquets pour en obtenir une nouvelle.

b) En utilisant $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, donner un équivalent de E_n.

c) Pour $n = 50$, comparer $E_{50} \approx 224{,}96$ à $n(\ln n + \gamma)$ puis à $n\left(\ln n + \gamma + \frac{1}{2n}\right)$ ($\gamma \approx 0{,}5772$).

d) Combien de paquets en moyenne pour $n = 100$? Par quel facteur le nombre moyen de paquets est-il multiplié quand on double n ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).