Plaquette 2 – Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Suites numériques — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$: (1) trouver un **intervalle stable** I ($f(I) \subset I$) contenant u_0 ; (2) chercher les **points fixes** de f dans I (signe de $f(x) - x$) ; (3) si f est **croissante** sur I, la suite est monotone (sens donné par le signe de $u_1 - u_0$) ; si f est **décroissante**, étudier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), qui relèvent de $f \circ f$ croissante ; (4) conclure par le théorème de la limite monotone et la continuité ($\ell = f(\ell)$). Pour la **vitesse**, utiliser l'inégalité des accroissements finis ($|f'| \leq k < 1$) ou un équivalent via Césaro.

Exercice 1 – Racines emboîtées

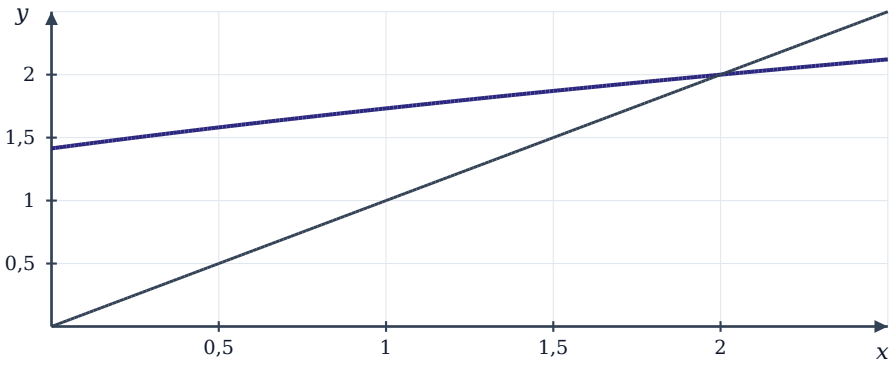
Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, soit $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}$.

a) Montrer que $[0, 2]$ est stable et que (u_n) est croissante.

b) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

c) Montrer que $u_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ (utiliser $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$).

d) En déduire un équivalent de $2 - u_n$.



La courbe de √(2 + x) et la bissectrice

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Itérer le cosinus

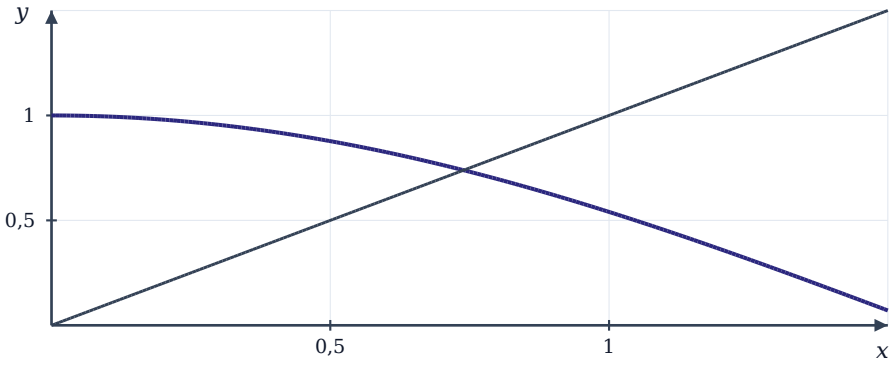
Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.

a) Montrer que $[0, 1]$ est stable par cos et que l'équation $\cos x = x$ a une unique solution $\alpha \in [0, 1]$.

b) Montrer que (u_{2n}) est croissante, (u_{2n+1}) décroissante, et que $u_{2n} \le \alpha \le u_{2n+1}$.

c) Montrer que $u_n \in [\cos 1, 1]$ pour $n \ge 1$ et que $|u_{n+1} - \alpha| \le \sin(1)\,|u_n - \alpha|$. Conclure.

d) Calculer $u_1, \dots, u_8$ et en déduire un encadrement de α.



La courbe du cosinus et la bissectrice

Exercice 3 – Suite logistique

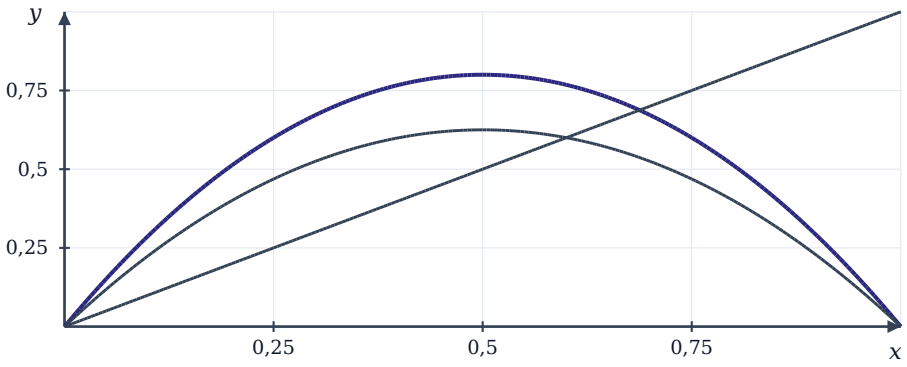
Soit $f_r(x) = rx(1 - x)$ sur $[0, 1]$, $r \in]0, 4]$, et $u_{n+1} = f_r(u_n)$ avec $u_0 \in]0, 1[$.

a) Montrer que $[0, 1]$ est stable et déterminer les points fixes.

b) Pour $r \le 1$, montrer que $u_n \to 0$.

c) Pour $1 < r \le 3$, on admet la convergence : vers quelle limite ? Calculer-la pour $r = 2{,}5$.

d) Pour $r = 3{,}2$, montrer que la suite ne peut pas converger vers $1 - \frac{1}{r}$ si $u_n \neq 1 - \frac{1}{r}$ (étudier $|f_r'|$ au point fixe), et vérifier que $\{0{,}5130; 0{,}7995\}$ est un 2-cycle.



f pour r = 3,2 (épaisse) et r = 2,5, avec la bissectrice

Exercice 4 – Équivalent de ln(1 + uₙ) itéré

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

a) Montrer que $u_n > 0$, que (u_n) est décroissante et tend vers 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \to \frac{1}{2}$ (utiliser $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$).

c) En déduire $u_n \sim \frac{2}{n}$.

d) Vérifier : $u_{100} \approx 0{,}019857$, $u_{10\,000} \approx 0{,}00020002$.

Exercice 5 – La suite $u_n + 1/u_n$

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

b) Calculer $u_{n+1}^2 - u_n^2$ et en déduire $u_n^2 = 1 + 2n + \sum_{k<n} \frac{1}{u_k^2}$.

c) En déduire $\sqrt{2n+1} \le u_n$ et $u_n \sim \sqrt{2n}$.

d) Vérifier : $u_{100} \approx 14{,}284$ et $u_{10\,000} \approx 141{,}444$.

Exercice 6 – Convergence lente vers 0

Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a) Montrer que (u_n) est décroissante, à valeurs dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, et tend vers 0.

b) Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1-u_n}$.

c) En déduire $u_n \sim \frac{1}{n}$, puis que $\frac{1}{u_n} = n + \ln n + O(1)$ (admettre l'étape finale).

d) Vérifier : $u_{100} \approx 0{,}0094$ et $u_{10\,000} \approx 0{,}0000999$.

Exercice 7 – Récurrence homographique

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

a) Montrer que $u_n \ge 1$ et déterminer le point fixe positif ℓ de $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

b) Montrer que $v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$ est géométrique ; préciser sa raison.

c) En déduire u_n explicitement et sa limite.

d) Calculer $u_1, \dots, u_5$: ce sont des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$.

Exercice 8 – Selon la valeur initiale

Soit $u_{n+1} = u_n^2$ puis $w_{n+1} = w_n^2 + \frac{1}{4}$.

a) Étudier (u_n) selon $u_0 \in \mathbb{R}$.

b) Pour (w_n) : montrer que $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ a un unique point fixe $\frac{1}{2}$ et que $f(x) \ge x$.

c) En déduire que (w_n) converge si et seulement si $|w_0| \le \frac{1}{2}$.

d) Pour $w_0 = 0$, montrer que $w_n \to \frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2} - w_n \sim \frac{1}{n}$ (admettre l'équivalent, vérifier $w_{1000} \approx 0{,}499$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Méthode de Héron généralisée

Soit $a > 0$, $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

a) Montrer que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$ et que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

b) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$.

c) En déduire que $\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2$, puis une formule explicite.

d) Pour $a = 10$, $u_0 = 3$: calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 10 – Un 2-cycle et la divergence

Soit $f(x) = 1 - x^2$ sur $[-1, 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $[0, 1]$ est stable, et déterminer le point fixe $\ell \in [0, 1]$.

b) Montrer que $f \circ f(x) = x$ a pour solutions 0, 1 et les points fixes de f.

c) Pour $u_0 = 0$, calculer les termes. Pour $u_0 = 0{,}5$, calculer $u_1, \ldots, u_6$: que se passe-t-il ?

d) Montrer que $|f'(\ell)| > 1$ et interpréter.

Exercice 11 – Exponentielle itérée

Soit $a > 0$ et $u_0 = 1$, $u_{n+1} = a^{u_n}$ ($a^{a^{a^{\cdots}}}$).

a) Pour $a = \sqrt{2}$, montrer que (u_n) est croissante majorée par 2, et converge vers 2.

b) Montrer que $x \mapsto \sqrt{2}^{x}$ a deux points fixes, 2 et 4. Pourquoi la limite n'est-elle pas 4 ?

c) Pour $a = 2$, montrer que $u_n \to +\infty$.

d) On admet que la suite converge si et seulement si $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leq a \leq \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$. Vérifier $\sqrt{2} \leq \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} \approx 1{,}4447$.

Exercice 12 – Nombre d'or par fraction continue

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que $u_n \in [1, 2]$ et que la fonction $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ y est décroissante.

b) Déterminer le point fixe φ et montrer que $|u_{n+1} - \varphi| = \frac{|u_n - \varphi|}{u_n \varphi} \leq \frac{|u_n - \varphi|}{\varphi}$.

c) En déduire la convergence et une vitesse.

d) Calculer $u_1, \ldots, u_6$ et écrire $u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Lire une suite sur un graphique

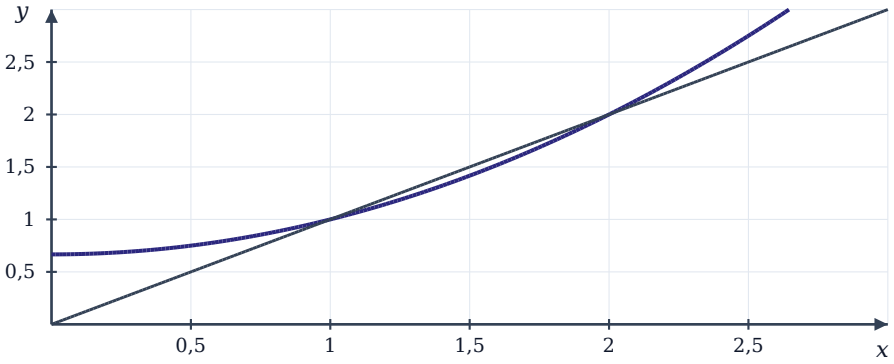
On considère $f(x) = \dfrac{x^2+2}{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Déterminer les points fixes de f et le signe de $f(x) - x$.

b) Discuter la convergence selon $u_0 \geq 0$: $u_0 \in [0,1[$, $u_0 = 1$, $u_0 \in]1,2[$, $u_0 = 2$, $u_0 > 2$.

c) Préciser la nature des points fixes (attractif, répulsif) par $|f'|$.

d) Pour $u_0 = 1{,}9$, combien de termes faut-il pour que $|u_n - 1| < 10^{-3}$? (estimer avec $f'(1) = \dfrac{2}{3}$)



La courbe de f et la bissectrice

Exercice 14 – Équation de Kepler

En mécanique céleste, l'anomalie excentrique E vérifie $E - e\sin E = M$ ($0 < e < 1$, M donné).

a) Montrer que l'équation a une unique solution $E \in \mathbb{R}$.

b) On pose $E_0 = M$ et $E_{n+1} = M + e\sin E_n$. Montrer que $|E_{n+1} - E| \leq e|E_n - E|$.

c) Pour $e = 0{,}2$ et $M = 1$, calculer E_1, E_2, E_3, E_4.

d) Combien d'itérations garantissent 10^{-8} pour $e = 0{,}2$?

Exercice 15 – Synthèse : une récurrence à paramètre

Soit $a > 0$, $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$.

a) Montrer que (u_n) est croissante et majorée par $\ell_a = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

b) En déduire la limite.

c) Pour quelles valeurs de a la limite est-elle entière ? Donner les premières.

d) Montrer que $\ell_a - u_{n+1} = \dfrac{\ell_a - u_n}{\ell_a + u_{n+1}} \leq \dfrac{\ell_a - u_n}{\ell_a}$; en déduire la vitesse de convergence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).