Plaquette 4 – L'algorithme du pivot : coût, pivot partiel, décomposition LU et Python

Systèmes linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Algorithme du pivot et ses variantes.

— **Remontée** (U triangulaire supérieure, $u_{ii} \neq 0$) : pour i de n à 1,

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)$$

soit environ n^2 opérations.

— **Élimination** : à l'étape k, pour $i > k$, $L_i \leftarrow L_i - m_{ik}L_k$ avec $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ (le pivot a_{kk} doit être non nul). Coût :

$$\sum_{j=1}^{n-1} j(j+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \sim \frac{n^3}{3} \text{ multiplications}$$

et autant d'additions, soit environ $\frac{2}{3}n^3$ opérations.

— **Pivot partiel** : à l'étape k, on échange L_k avec la ligne L_p ($p \geq k$) où $|a_{pk}|$ est maximal ; les multiplicateurs vérifient alors $|m_{ik}| \leq 1$.

— **Décomposition LU** : si l'élimination se fait sans échange, $A = LU$ avec L triangulaire inférieure à diagonale de 1 (sous la diagonale : les m_{ik}) et U la matrice échelonnée obtenue. Résoudre $AX = B$: $LY = B$ (descente) puis $UX = Y$ (remontée), environ $2n^2$ opérations.

— Avec échanges : $PA = LU$, P matrice de permutation.

— **Conditionnement** : un système dont les lignes sont « presque liées » amplifie énormément les petites erreurs sur B.

Correction de l'exercice 1 – Remontée d'un système triangulaire et son coût

a) On résout de la dernière équation à la première, chaque inconnue calculée servant aux suivantes :

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{j>i} u_{ij}x_j\right)$$

— $t = \frac{4}{4} = 1$;

— $z = \frac{-1-2t}{3} = \frac{-3}{3} = -1$;

— $y = -1 - 2z + t = -1 + 2 + 1 = 2$;

— $x = \frac{-2+y-3z-t}{2} = \frac{-2+2+3-1}{2} = 1$.

— Contrôle dans la première équation : $2 - 2 - 3 + 1 = -2$. La solution est $(1, 2, -1, 1)$.

b) La formule de remontée ne fait intervenir que des divisions par les u_{ii}, tous non nuls : elle définit x_n, puis x_{n-1}, …, puis x_1 **de façon unique**, et les valeurs obtenues vérifient chaque équation par construction. Il y a donc existence et unicité pour tout B : le système est de Cramer (la matrice triangulaire est inversible).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Le calcul de x_i utilise les $n-i$ inconnues déjà connues : $n-i$ multiplications, $n-i$ soustractions et 1 division. En sommant sur i :

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i)=\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$$

— soit $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications, autant de soustractions et n divisions : environ n^2 opérations au total. Pour $n=1000$, un million d'opérations, ce qui est **négligeable** devant l'élimination (exercice suivant).

Réponse. $(x,y,z,t)=(1,2,-1,1)$; coût : $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications et soustractions, n divisions.

Correction de l'exercice 2 – Descente bidiagonale : un compte épargne

a) Pendant l'année k, le solde x_{k-1} est multiplié par a, puis on verse b_k : $x_k=ax_{k-1}+b_k$. En posant $x_0=0$, on obtient le système $LX=B$ avec

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ -a & 1 & \ddots & \vdots\\ & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & -a & 1\end{pmatrix}$$

— L est triangulaire **inférieure**, bidiagonale, à diagonale de 1 : on résout de haut en bas (descente).

b) Descente : $x_1=b_1$, $x_2=b_2+ab_1$, $x_3=b_3+ab_2+a^2b_1$. Montrons par récurrence la formule annoncée.

— Initialisation : $x_1=b_1=a^0b_1$.

— Hérédité : si $x_{k-1}=\sum_{j=1}^{k-1}a^{k-1-j}b_j$, alors

$$x_k=b_k+a\sum_{j=1}^{k-1}a^{k-1-j}b_j=b_k+\sum_{j=1}^{k-1}a^{k-j}b_j=\sum_{j=1}^{k}a^{k-j}b_j$$

c) $X=L^{-1}B$ et $x_i=\sum_j a^{i-j}b_j$ pour $j\le i$: on lit le coefficient (i,j) de L^{-1}, qui vaut a^{i-j} si $j\le i$ et 0 sinon. L^{-1} est triangulaire inférieure, **pleine** sous la diagonale, alors que L n'a que deux diagonales : l'inverse d'une matrice creuse n'est pas creux, d'où l'intérêt de résoudre sans inverser.

d) $x_3=2000+1{,}02\times1500+1{,}02^2\times1000=2000+1530+1040{,}4=4570{,}4$ euros.

Réponse. $x_k=\sum_{j\le k}a^{k-j}b_j$; $(L^{-1})_{ij}=a^{i-j}$ pour $j\le i$; $x_3=4570{,}40$ €.

Correction de l'exercice 3 – Compter les opérations du pivot de Gauss

a) Pour chaque ligne $i>k$ (il y en a $n-k$), on calcule le multiplicateur $m_{ik}=a_{ik}/a_{kk}$ (une division), puis on met à jour les coefficients des colonnes $k+1$ à n et le second membre : $n-k+1$ multiplications (et autant de soustractions). L'étape k coûte donc $(n-k)(n-k+1)$ multiplications.

b) En posant $j=n-k$, qui va de 1 à $n-1$:

$$\sum_{j=1}^{n-1}j(j+1)=\sum_{j=1}^{n-1}j^2+\sum_{j=1}^{n-1}j=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Contrôle pour $n = 2$: une seule ligne à traiter, 2 multiplications, et la formule donne $\frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$.

— Avec autant de soustractions : environ $\frac{2}{3}n^3$ opérations, les divisions ($\frac{n(n-1)}{2}$) et la remontée ($\approx n^2$) étant négligeables.

c) $n = 1000$: $\frac{2}{3} \times 10^9$ opérations, soit environ 0,67 s. $n = 10^4$: $\frac{2}{3} \times 10^{12}$ opérations, soit environ 667 s, **plus de 11 minutes**.

d) Le coût est cubique : doubler n multiplie la durée par $2^3 = 8$. La remontée, quadratique, n'est multipliée que par 4, et reste de toute façon $\frac{2n}{3}$ fois moins chère que l'élimination : c'est l'élimination qui décide du temps de calcul.

Réponse. Étape k : $(n-k)(n-k+1)$; total $\frac{(n-1)n(n+1)}{3} \sim \frac{n^3}{3}$ multiplications, $\sim \frac{2}{3}n^3$ opérations ; 0,67 s pour $n = 1000$, ≈ 11 min pour $n = 10^4$.

Correction de l'exercice 4 – Pivot nul : permuter les lignes

a) Le coefficient de x dans L_1 est nul : il ne peut pas servir de pivot (on diviserait par 0). On échange $L_1 \leftrightarrow L_2$, ce qui donne un système équivalent :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y + z = 3 \\ 2x + 4y + 5z = 11 \end{cases}$$

— $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$: $2y + 3z = 5$; puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $2z = 2$.

— Remontée : $z = 1$, $y = \frac{3-1}{2} = 1$, $x = 3 - 1 - 1 = 1$. Solution $(1, 1, 1)$.

b) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent les lignes $(0, 0, 1)$ et $(0, 1, 2)$. Le coefficient en position $(2, 2)$ est **nul** : le pivot de la deuxième étape manque, alors que A est inversible (on le voit en échangeant ces deux lignes : on obtient une matrice triangulaire à diagonale non nulle).

c) Multiplier à gauche par P échange les lignes 2 et 3 :

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— L'élimination sur PA se fait sans échange avec les multiplicateurs $m_{21} = 1$, $m_{31} = 1$, $m_{32} = 0$, qu'on range sous la diagonale de L.

— Vérification de la dernière ligne : $1 \times (1, 1, 1) + 1 \times (0, 0, 1) = (1, 1, 2)$.

d) $AX = B \Leftrightarrow PAX = PB \Leftrightarrow LUX = PB$, avec $PB = (3, 6, 4)$.

— Descente $LY = PB$: $y_1 = 3$, $y_2 = 6 - 3 = 3$, $y_3 = 4 - 3 = 1$.

— Remontée $UX = Y$: $z = 1$, $y = 3 - 2 = 1$, $x = 3 - 1 - 1 = 1$. Solution $(1, 1, 1)$.

Réponse. a) $(1, 1, 1)$; c) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $X = (1, 1, 1)$.

Correction de l'exercice 5 – Petit pivot et erreurs d'arrondi

a) $L_2 - L_1$ donne $(1 - \varepsilon)x = 1$, d'où

$$x = \frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1{,}0001, \qquad y = 2 - x = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \approx 0{,}9999$$

b) Pivot ε : multiplicateur $m = \frac{1}{\varepsilon} = 10^4$, et $L_2 \leftarrow L_2 - 10^4 L_1$ donne $(1 - 10^4)y = 2 - 10^4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— À trois chiffres : $1 - 10^4 = -9999$ s'arrondit à $-1{,}00 \times 10^4$, et $2 - 10^4 = -9998$ aussi. Donc $y = 1{,}00$.

— Remontée : $x = \dfrac{1-y}{\varepsilon} = \dfrac{0}{10^{-4}} = 0$.

— Le résultat $x = 0$ est **complètement faux** (au lieu de 1). Le multiplicateur énorme a noyé l'information de L_2, puis la division par le petit pivot a amplifié l'erreur commise sur y.

c) Après échange, le pivot est 1 et le multiplicateur $m = \varepsilon$: $L_2 \leftarrow L_2 - \varepsilon L_1$ donne $(1-\varepsilon)y = 1 - 2\varepsilon$.

— À trois chiffres : $0{,}9999 \to 1{,}00$ et $0{,}9998 \to 1{,}00$, donc $y = 1{,}00$, puis $x = 2 - y = 1{,}00$.

— Le résultat est **exact aux trois chiffres près** : même précision de calcul, même nombre d'opérations, seul l'ordre des lignes a changé.

d) Le pivot partiel choisit le pivot de plus grande valeur absolue dans la colonne, donc

$$|m_{ik}| = \frac{|a_{ik}|}{|a_{kk}|} \leq 1$$

— Chaque mise à jour $a_{ij} - m_{ik}a_{kj}$ n'amplifie pas l'erreur déjà présente sur a_{kj} ; avec un petit pivot, au contraire, elle la multiplie par un facteur $\frac{1}{|a_{kk}|}$ qui peut être énorme. C'est pourquoi toutes les bibliothèques numériques pratiquent le pivot partiel.

Réponse. Exact : $x \approx 1{,}0001$, $y \approx 0{,}9999$; sans échange (3 chiffres) : $x = 0$, $y = 1$, faux ; avec pivot partiel : $x = y = 1$.

Correction de l'exercice 6 – Décomposition LU et plusieurs seconds membres

a) Première étape (pivot 2) : $m_{21} = 2$, $m_{31} = 4$, et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ donnent les lignes $(0,1,1)$ et $(0,3,5)$. Deuxième étape (pivot 1) : $m_{32} = 3$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donne $(0,0,2)$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Ligne 2 de LU : $2(2,1,1) + (0,1,1) = (4,3,3)$. Ligne 3 : $4(2,1,1) + 3(0,1,1) + (0,0,2) = (8,7,9)$. On retrouve A.

c) $AX = B \Leftrightarrow L(UX) = B$: on résout $LY = B$ puis $UX = Y$.

— B_1 : descente $y_1 = 1$, $y_2 = 1 - 2 = -1$, $y_3 = 1 - 4 + 3 = 0$; remontée $z = 0$, $y = -1$, $x = \frac{1+1}{2} = 1$. $X_1 = (1,-1,0)$, et $AX_1 = (2-1, 4-3, 8-7) = (1,1,1)$.

— B_2 : descente $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 8 - 0 - 6 = 2$; remontée $z = 1$, $y = 2 - 1 = 1$, $x = \frac{0-1-1}{2} = -1$. $X_2 = (-1,1,1)$, et $AX_2 = (0,2,8)$.

d) Refaire l'élimination pour chaque second membre coûte environ $p \times \frac{2}{3}n^3$ opérations. Factoriser une fois coûte $\frac{2}{3}n^3$, puis chaque résolution $2n^2$:

$$\frac{2}{3}n^3 + 2pn^2 \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2}{3}pn^3$$

— Pour $n = 1000$ et $p = 100$: environ $0{,}87 \times 10^9$ opérations au lieu de 67×10^9, soit près de 80 fois moins.

Réponse. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $X_1 = (1,-1,0)$, $X_2 = (-1,1,1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Unicité de la décomposition LU

a) L_1 est inversible (triangulaire à diagonale non nulle), donc $U_1 = L_1^{-1}A$ est inversible comme produit de matrices inversibles. De même pour U_2.

b) On multiplie $L_1U_1 = L_2U_2$ à gauche par L_2^{-1} et à droite par U_1^{-1} :

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

c) Le membre de gauche est triangulaire **inférieur** à diagonale de 1, celui de droite triangulaire **supérieur**. Une matrice à la fois triangulaire inférieure et supérieure est diagonale ; ici sa diagonale est celle de $L_2^{-1}L_1$, faite de 1. Donc

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I_n$$

— d'où $L_1 = L_2$ puis $U_1 = U_2$.

d) Non : on peut transférer un facteur diagonal de U vers L. En taille 1, $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$. En taille 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— Plus généralement, $LU = (LD)(D^{-1}U)$ pour toute matrice diagonale inversible D. La **normalisation** (diagonale de L égale à 1) est ce qui rend la décomposition unique ; c'est celle que fournit naturellement le pivot, les 1 correspondant aux lignes non modifiées par leur propre élimination.

Réponse. $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ est à la fois triangulaire inférieure unipotente et triangulaire supérieure, donc égale à I_n ; sans normalisation, $LU = (LD)(D^{-1}U)$.

Correction de l'exercice 8 – Quand la décomposition LU existe-t-elle ?

a) Supposons $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ \ell u & \ell v + w \end{pmatrix}$.

— Le coefficient $(1,1)$ impose $u = 0$, et alors le coefficient $(2,1)$ vaut $\ell u = 0 \neq 1$: contradiction. Il n'y a pas de décomposition LU ; la matrice est pourtant inversible (il suffit d'échanger les lignes).

b) Découpons en blocs de tailles k et $n-k$:

$$\begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_k & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

— Le bloc en haut à gauche du produit vaut $L_kU_k + 0 \times 0 = L_kU_k$. Comme L_k est triangulaire à diagonale de 1 et U_k triangulaire de diagonale $u_{11}, \ldots, u_{kk}$ (non nuls car U est inversible), $A_k = L_kU_k$ est inversible.

c) Si toutes les A_k sont inversibles, tous les pivots $a_{kk}^{(k)}$ sont non nuls : l'élimination va jusqu'au bout **sans échange**, et fournit $A = LU$ avec U triangulaire à diagonale non nulle. Bilan :

$$A = LU,\ U \text{ inversible} \Leftrightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ inversibles}$$

d) $A_1 = (1)$ est inversible, mais $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ne l'est pas (sa deuxième ligne est le double de la première). Pas de LU sans échange : effectivement, après $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, les lignes deviennent $(0,0,-1)$ et $(0,1,1)$, et le deuxième pivot est nul. En revanche, A est inversible et, après échange de L_2 et L_3, on obtient $PA = LU$.

Réponse. LU (avec U inversible) existe si et seulement si toutes les sous-matrices

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

principales A_k sont inversibles ; d) non, car A_2 n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 9 – Système tridiagonal : équilibre d'un fil tendu

a) Seule la ligne $k+1$ contient x_k sous la diagonale, avec le coefficient -1. Le multiplicateur est $m = -\frac{1}{d_k}$, et la ligne $k+1$ devient :

$$d_{k+1} = 2 - \frac{1}{d_k}, \qquad b'_{k+1} = 1 + \frac{b'_k}{d_k}$$

— Initialisation : $d_1 = 2 = \frac{2}{1}$ et $b'_1 = 1 = \frac{2}{2}$.

— Hérédité : si $d_k = \frac{k+1}{k}$ et $b'_k = \frac{k+1}{2}$, alors $d_{k+1} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$ et $b'_{k+1} = 1 + \frac{k+1}{2} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{2}$.

— Tous les pivots sont non nuls : aucun échange n'est nécessaire.

b) $n = 4$: le système triangulaire obtenu est $d_k x_k - x_{k+1} = b'_k$, avec $d = (2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4})$ et $b' = (1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})$.

— $x_4 = \frac{5/2}{5/4} = 2$; $x_3 = \frac{2+2}{4/3} = 3$; $x_2 = \frac{\frac{3}{2}+3}{3/2} = 3$; $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$.

— Solution $(2, 3, 3, 2)$, symétrique comme le problème.

c) Pour $f(k) = \frac{k(n+1-k)}{2}$, la différence seconde d'un polynôme de degré 2 de coefficient dominant $-\frac{1}{2}$ vaut $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$:

$$-f(k-1) + 2f(k) - f(k+1) = -(f(k+1) - 2f(k) + f(k-1)) = 1$$

— De plus $f(0) = f(n+1) = 0$, ce qui règle la première et la dernière équation. Pour $n = 4$: $f(1), \ldots, f(4) = 2, 3, 3, 2$.

d) Chaque étape ne touche qu'une ligne et deux coefficients : environ 3 opérations pour le pivot et le second membre, puis 3 par inconnue à la remontée, soit **de l'ordre de** $8n$ opérations (algorithme de Thomas), au lieu de $\frac{2}{3}n^3$. Pour $n = 10^6$: quelques millions d'opérations, contre $\frac{2}{3} \times 10^{18}$. Exploiter la structure creuse change tout.

Réponse. $d_k = \frac{k+1}{k}$, $b'_k = \frac{k+1}{2}$; $n = 4$: $(2, 3, 3, 2)$; $x_k = \frac{k(n+1-k)}{2}$; coût linéaire en n.

Correction de l'exercice 10 – Programmer la remontée en Python

a) La ligne i fait intervenir les inconnues d'indice $j > i$, déjà calculées puisqu'on parcourt i en décroissant ; on applique la formule de remontée :

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} u_{ij} x_j \right) \qquad \text{(indices Python de 0 à } n-1\text{)}$$

Script :

```
def remontee(U, B):
    n = len(B)
    X = [0] * n
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        s = B[i]
        for j in range(i + 1, n):
            s = s - U[i][j] * X[j]
        X[i] = s / U[i][i]
    return X
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) C'est le système de l'exercice 1 : le programme affiche *[1.0, 2.0, -1.0, 1.0]*. Les valeurs sont des flottants (la division / renvoie toujours un flottant), même si le résultat est entier.

c) La division par 0 déclenche l'erreur *ZeroDivisionError*. On peut la prévenir par une assertion en tête de boucle, *assert U[i][i] != 0*, qui explique l'échec ; mathématiquement, un zéro diagonal signifie que U n'est pas inversible et que le système n'a pas une unique solution.

d) On parcourt les lignes dans l'ordre croissant, les inconnues utiles étant celles d'indice $j < i$:

```
def descente(L, B):
    n = len(B)
    X = [0] * n
    for i in range(n):
        s = B[i]
        for j in range(i):
            s = s - L[i][j] * X[j]
        X[i] = s / L[i][i]
    return X
```

Réponse. Boucle *range(i + 1, n)* et *X[i] = s / U[i][i]* ; affichage *[1.0, 2.0, -1.0, 1.0]*.

Correction de l'exercice 11 – Un bug classique dans le pivot partiel

a) Lignes 3 et 4 : on travaille sur des **copies** de A et B, pour ne pas modifier les listes de l'appelant (les listes sont mutables en Python). Ligne 6 : p est l'indice $i \geq k$ qui maximise $|a_{ik}|$, c'est le choix du pivot partiel.

b) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $-y + z = 1$; $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$: $-2y - 3z = -13$; puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$: $-5z = -15$.

— $z = 3$, $y = z - 1 = 2$, $x = 6 - 2 - 3 = 1$. Solution $(1, 2, 3)$.

c) Première équation : $-6{,}6 + 14{,}3 + 3{,}8 = 11{,}5 \neq 6$. Le programme échange les lignes de A **sans échanger les coefficients de** B : chaque équation se retrouve avec le second membre d'une autre, et l'on résout un autre système. Une opération sur les lignes doit porter sur la ligne **complète** de la matrice augmentée $(A \mid B)$.

d) On ajoute, juste après l'échange des lignes de A, la ligne *B[k], B[p] = B[p], B[k]*. Déroulement :

— $k = 0$: le plus grand $|a_{i0}|$ est 4 (ligne 3). Après échange : $(4, 2, 1 \mid 11)$, $(2, 1, 3 \mid 13)$, $(1, 1, 1 \mid 6)$. Multiplicateurs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$:

$$(0, 0, 2{,}5 \mid 7{,}5), \qquad (0, 0{,}5, 0{,}75 \mid 3{,}25)$$

— $k = 1$: dans la colonne 2, les candidats sont 0 et 0,5 : on échange, et le multiplicateur suivant est 0.

— Remontée : $z = \frac{7{,}5}{2{,}5} = 3$, $y = \frac{3{,}25 - 0{,}75 \times 3}{0{,}5} = 2$, $x = \frac{11 - 2 \times 2 - 3}{4} = 1$.

— Le programme corrigé affiche *[1.0, 2.0, 3.0]*. Remarquer que le pivot partiel a ici **évité un pivot nul** : sans échange à l'étape $k = 1$, on aurait divisé par 0.

Réponse. Solution $(1, 2, 3)$; l'erreur : B n'est pas permuté avec A ; ajouter *B[k], B[p] = B[p], B[k]*.

Correction de l'exercice 12 – Calculer un rang en Python : flottants ou fractions

a) La fonction échelonne M par opérations élémentaires sur les lignes, qui **conservent le rang**. Pour chaque colonne j, elle cherche un pivot non nul parmi les lignes non encore

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

utilisées ; s'il n'y en a pas, la colonne ne crée pas de nouvel échelon. Sinon, elle le remonte en ligne r, élimine en dessous et incrémente r. À la fin, r est le nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée, c'est-à-dire :

$$\operatorname{rg} M = \text{nombre de pivots de la forme échelonnée}$$

b) $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$ donnent $(0, -3, -6)$ et $(0, -6, -12)$; puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $(0, 0, 0)$. Deux pivots : la fonction renvoie *2*. (Ici les calculs en flottants sont exacts : ce sont des entiers.)

c) La deuxième ligne vaut exactement 3 fois la première : le vrai rang est 1. Mais 0,1 et 0,3 ne sont pas représentables exactement en binaire. Le multiplicateur calculé vaut $m = 2{,}9999999999999996$, et le nouveau coefficient $0{,}9 - m \times 0{,}3$ vaut environ $2{,}2 \times 10^{-16}$ au lieu de 0. Le test *M[i][j] != 0* le prend pour un pivot : rang 2. Le rang n'est **pas une fonction continue** des coefficients, un calcul approché ne peut pas le trouver de façon sûre.

d) Deux remèdes classiques :

— calculer en **fractions exactes** : avec *from fractions import Fraction* et les coefficients *Fraction(1, 10)*, *Fraction(3, 10)*…, le même programme renvoie *1* ;
— en flottants, remplacer le test par *abs(M[i][j]) > 1e-12* (seuil de tolérance), en sachant que le choix du seuil reste une décision, non une certitude.

Réponse. b) *2* ; c) le vrai rang est 1, l'erreur d'arrondi crée un faux pivot $\approx 2{,}2 \times 10^{-16}$; d) fractions exactes ou seuil de tolérance.

Correction de l'exercice 13 – Une méthode itérative : Jacobi

a) $x = 5 - 3y$ dans la première : $20 - 12y + y = 9$, donc $y = 1$ et $x = 2$.

b) Chaque équation est résolue par rapport à son inconnue « diagonale », en utilisant l'itéré précédent pour l'autre :

— $(x_1, y_1) = (2{,}25\ ;\ 1{,}6667)$;
— $(x_2, y_2) = \left(\frac{9 - 1{,}6667}{4}\ ;\ \frac{5 - 2{,}25}{3}\right) = (1{,}8333\ ;\ 0{,}9167)$;
— $(x_3, y_3) = (2{,}0208\ ;\ 1{,}0556)$;
— $(x_4, y_4) = (1{,}9861\ ;\ 0{,}9931)$.

c) La solution $(2, 1)$ vérifie les mêmes relations : $2 = \frac{9 - 1}{4}$ et $1 = \frac{5 - 2}{3}$. Par différence :

$$x_{k+1} - 2 = -\frac{y_k - 1}{4}, \qquad y_{k+1} - 1 = -\frac{x_k - 2}{3}$$

— Donc $|x_{k+1} - 2| \le \frac{1}{4} e_k \le \frac{1}{3} e_k$ et $|y_{k+1} - 1| \le \frac{1}{3} e_k$, d'où $e_{k+1} \le \frac{1}{3} e_k$.
— Par récurrence, $e_k \le 3^{-k} e_0 = 2 \times 3^{-k}$ car $e_0 = \max(2, 1) = 2$.
— $2 \times 3^{-k} < 10^{-3} \Leftrightarrow 3^k > 2000$: comme $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$, c'est garanti dès $k = 7$.

d) On a utilisé la **dominance diagonale** : dans chaque ligne, le coefficient diagonal l'emporte sur les autres ($4 > 1$ et $3 > 1$), ce qui fait des facteurs $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ inférieurs à 1. Chaque itération ne coûte qu'un produit matrice-vecteur, soit quelques opérations par coefficient **non nul** : pour un système creux de taille 10^6, on fait quelques dizaines d'itérations peu coûteuses au lieu d'un pivot en n^3 qui, de plus, remplirait la matrice.

Réponse. $(2, 1)$; $(x_4, y_4) \approx (1{,}9861; 0{,}9931)$; $e_k \le 2 \times 3^{-k}$, précision 10^{-3} garantie dès $k = 7$.

Correction de l'exercice 14 – Un système mal conditionné

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Dans les deux cas, $L_2 - L_1$ élimine x et donne $0{,}0001\,y = c - 2$:

$$(S)\text{:}\,0{,}0001\,y = 0{,}0001,\ y = 1,\ x = 1 \qquad (S')\text{:}\,0{,}0001\,y = 0{,}0002,\ y = 2,\ x = 0$$

b) Le second membre passe de $(2; 2{,}0001)$ à $(2; 2{,}0002)$: une variation de 10^{-4}, soit une variation relative d'environ $\frac{10^{-4}}{2} = 5 \times 10^{-5}$. La solution passe de $(1, 1)$ à $(0, 2)$: une variation de 1 sur chaque coordonnée, soit 100 %. L'erreur relative est amplifiée d'un facteur de l'ordre de 2×10^4.

c) Chaque équation est une droite du plan. Les deux droites ont pour pentes -1 et $-\frac{1}{1{,}0001} \approx -0{,}9999$: elles sont **presque parallèles**. Un déplacement infime de l'une fait glisser leur point d'intersection très loin le long de l'autre.

d) Avec une incertitude de 10^{-4} sur les données, la solution n'est connue qu'**à une unité près** : elle est inexploitable, et ce n'est pas la faute de l'algorithme (le calcul ci-dessus est exact). Le défaut est dans le **problème**, qu'on dit *mal conditionné*. Il faut changer la mesure : remplacer la seconde équation par une mesure « plus indépendante » de la première (deux droites franchement sécantes), ou mesurer beaucoup plus précisément.

Réponse. (S) : $(1, 1)$; (S') : $(0, 2)$; une perturbation de 10^{-4} du second membre déplace la solution d'une unité : système mal conditionné.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la matrice de Hilbert

a) B est formé des sommes des lignes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{13}{12} \\ \frac{47}{60} \end{pmatrix}$$

b) Première colonne de HH^{-1}, produit de H par $(9, -36, 30)$:

— ligne 1 : $9 - 18 + 10 = 1$;

— ligne 2 : $\frac{9}{2} - 12 + \frac{30}{4} = 4{,}5 - 12 + 7{,}5 = 0$;

— ligne 3 : $3 - 9 + 6 = 0$. On obtient bien la première colonne de I_3.

c) Par linéarité, $X' = H^{-1}B' = H^{-1}B + H^{-1}(0, 0, 0{,}01) = X + 0{,}01\,C_3$, où C_3 est la troisième colonne de H^{-1} :

$$X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}01 \begin{pmatrix} 30 \\ -180 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3 \\ -0{,}8 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$$

d) Erreur relative sur les données (en prenant la plus grande composante) : $\frac{0{,}01}{11/6} \approx 0{,}55\,\%$. Erreur relative sur la solution : $\frac{1{,}8}{1} = 180\,\%$. Le facteur d'amplification dépasse 300 dès la taille 3.

— La cause : les colonnes de H sont presque proportionnelles (les fonctions $1, x, x^2$ se ressemblent sur $[0, 1]$), et H^{-1} a d'énormes coefficients.

— Ce facteur explose avec la taille : de l'ordre de 10^{13} pour $n = 10$, si bien qu'en flottants (environ 16 chiffres significatifs), la solution calculée n'a plus que deux ou trois chiffres justes. D'où la règle : pour approcher une fonction, on évite la base $1, x, \ldots, x^n$ et l'on choisit des polynômes orthogonaux.

Réponse. $B = \left(\frac{11}{6}, \frac{13}{12}, \frac{47}{60}\right)$; $X' = (1{,}3; -0{,}8; 2{,}8)$; erreur relative amplifiée d'un facteur supérieur à 300.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).