Plaquette 3 – Discussion de systèmes à paramètres

Systèmes linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Discuter un système à paramètre.

— Échelonner **sans diviser** par une expression en m tant qu'on ne sait pas si elle est nulle ; noter les **pivots littéraux**.

— Valeurs critiques : celles qui annulent un pivot. Hors de ces valeurs, le rang est maximal.

— Pour chaque valeur critique, **reprendre le système numérique** : le rang baisse, et l'on obtient soit une infinité de solutions, soit une incompatibilité ($0 = c \neq 0$).

— En dimension 2 : $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ a une unique solution si et seulement si

$$ad - bc \neq 0$$

— Système homogène carré : solutions non nulles $\Leftrightarrow$ rang $< n$.

— Racines de l'unité : $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ vérifie $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

— Sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier), tout élément non nul est inversible : un pivot c est utilisable si et seulement si $p \nmid c$.

— **Contrôle** : vérifier la formule générale sur une valeur simple du paramètre.

Correction de l'exercice 1 – Un facteur qui se simplifie

a) $D(m) = m^2 - 3m + 2 - 6 = m^2 - 3m - 4 = (m-4)(m+1)$.

b) Si $D(m) \neq 0$, le système est de Cramer. En éliminant (formules de Cramer en dimension 2) :

$$x = \frac{2(m-2) - 2(2m-1)}{D(m)}, \qquad y = \frac{(m-1)(2m-1) - 6}{D(m)}$$

— Numérateur de x : $2m - 4 - 4m + 2 = -2(m+1)$, donc $x = \dfrac{-2}{m-4}$.

— Numérateur de y : $2m^2 - 3m - 5 = (m+1)(2m-5)$, donc $y = \dfrac{2m-5}{m-4}$.

— Contrôle avec $m = 0$: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{4}$, et $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$, $\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1$.

c) $m = -1$: les équations deviennent $-2x + 2y = 2$ et $3x - 3y = -3$, toutes deux équivalentes à $y = x + 1$. **Infinité** de solutions : la droite $\{(t, t+1)\}$.

— $m = 4$: $3x + 2y = 2$ et $3x + 2y = 7$: **incompatible**.

d) Quand $m \to 4$, $|x| \to +\infty$: les deux droites deviennent **parallèles** et leur point d'intersection part à l'infini. Pour $m = -1$ au contraire, le facteur $(m+1)$ se simplifie parce que les deux droites deviennent **confondues** : la formule générale a une limite finie, $\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right)$, mais qui n'est qu'**un** point de la droite des solutions.

Réponse. $m \notin \{-1, 4\}$: $\left(\dfrac{-2}{m-4}, \dfrac{2m-5}{m-4}\right)$; $m = -1$: droite $y = x + 1$; $m = 4$: aucune solution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Diviser par une expression qui peut s'annuler

a) $m \times 0 + 1 = 1$ et $0 + m \times 1 = m$: $(0, 1)$ est bien solution pour tout m. La conclusion fausse porte sur **l'unicité**.

b) Le passage de $(1 - m^2)y = 1 - m^2$ à $y = 1$ divise par $1 - m^2$, ce qui n'est licite que si

$$1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

— Pour $m = \pm 1$, l'équation devient $0 \times y = 0$: **toute** valeur de y convient. L'élève a transformé une équation vraie pour tout y en $y = 1$.

c) $m \neq \pm 1$: l'élimination est équivalente (on a gardé L_2), et la division est permise : solution **unique** $(0, 1)$.

— $m = 1$: les deux équations sont $x + y = 1$. Solutions : $\{(t, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
— $m = -1$: $-x + y = 1$ et $x - y = -1$ sont la même équation. Solutions : $\{(t, 1 + t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
— **Contrôle** par le déterminant $m^2 - 1$, nul exactement pour $m = \pm 1$.
— **Règle** : une division par une expression du paramètre doit toujours être précédée de « si … $\neq 0$ », et le cas « $= 0$ » traité ensuite.

Réponse. Division par $1 - m^2$ illicite pour $m = \pm 1$: $m \neq \pm 1$: $(0, 1)$; $m = 1$: $(t, 1 - t)$; $m = -1$: $(t, 1 + t)$.

Correction de l'exercice 3 – Système non carré à paramètre

a) Pour $m = 1$ les trois équations valent $x + y = 1$: une **infinité** de solutions, la droite $\{(t, 1 - t)\}$.

b) $L_2 - L_1$: $(m - 1)y = m - 1$; comme $m \neq 1$, on peut diviser : $y = 1$, puis $x = 0$. Les deux premières équations imposent donc $(x, y) = (0, 1)$, et la troisième devient

$$m \times 0 + 1 = m^2 \Leftrightarrow m^2 = 1$$

— Avec $m \neq 1$, il reste $m = -1$.

c) **Bilan.**

— $m = 1$: infinité de solutions (une droite) ;
— $m = -1$: solution unique $(0, 1)$;
— $m \notin \{-1, 1\}$: aucune solution.
— Vérification pour $m = -1$: $0 + 1 = 1$, $0 - 1 = -1 = m$, $0 + 1 = 1 = m^2$.
— **Lecture en rangs** : la matrice 3×2 est de rang 2 pour $m \neq 1$; la matrice augmentée, 3×3, est de rang 3 sauf si $m^2 = 1$. Il y a compatibilité exactement quand les deux rangs coïncident.

Réponse. $m = 1$: droite $x + y = 1$; $m = -1$: $(0, 1)$; sinon aucune solution.

Correction de l'exercice 4 – Infinité de solutions : conditions sur deux paramètres

a) Avec L_1 comme pivot :

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $y + (a - 6)z = 1$;
— $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $y + z = b - 4$;
— $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $(7 - a)z = b - 5$.

Le système échelonné a pour pivots 1, 1 et le **pivot littéral** $7 - a$.

b) La discussion ne porte que sur la dernière ligne :

$$(7 - a)\, z = b - 5$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $a \neq 7$: trois pivots, **solution unique** (quel que soit b) ;
— $a = 7$ et $b = 5$: la ligne devient $0 = 0$, **infinité** de solutions ;
— $a = 7$ et $b \neq 5$: $0 = b - 5 \neq 0$, **aucune** solution.

c) Pour $(a, b) = (7, 5)$: il reste $x + 2y + 3z = 4$ et $y + z = 1$. Avec $z = t$: $y = 1 - t$ et $x = 4 - 2(1 - t) - 3t = 2 - t$.

— Solutions : $(2, 1, 0) + t(-1, -1, 1)$, une droite.
— Contrôle en $t = 0$: $2 + 2 = 4$, $4 + 5 = 9$, $2 + 3 = 5$.
— Pour $a \neq 7$, par exemple $(a, b) = (6, 5)$: $z = 0$, $y = 1$, $x = 2$.

Réponse. $a \neq 7$: unique ; $a = 7$, $b = 5$: droite $(2 - t, 1 - t, t)$; $a = 7$, $b \neq 5$: aucune.

Correction de l'exercice 5 – Trois plans qui ne se coupent jamais en un point

a) $L_1 - L_2$: $2y = 0$, donc $y = 0$ et $x + z = 1$. $D = \{(1 - t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, dirigée par $w = (-1, 0, 1)$.

b) On cherche α, β avec $\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -1, 1) = (m, 1, m)$, soit $\alpha + \beta = m$ et $\alpha - \beta = 1$:

$$(m, 1, m) = \frac{m + 1}{2}(1, 1, 1) + \frac{m - 1}{2}(1, -1, 1)$$

— La troisième ligne de la matrice est toujours combinaison des deux premières : le rang vaut 2 **pour tout** m. Jamais de solution unique.

c) Le système est compatible si et seulement si la même combinaison relie les seconds membres :

$$2 = \frac{m + 1}{2} \times 1 + \frac{m - 1}{2} \times 1 = m$$

— $m = 2$: P_3:$2x + y + 2z = 2$ **contient** D (contrôle : $2(1 - t) + 0 + 2t = 2$). Les trois plans forment un **faisceau** d'axe D ; l'intersection est D.
— $m = 1$: P_3:$x + y + z = 2$ est **strictement parallèle** à P_1. Intersection vide.
— $m = -1$: P_3: $-x + y - z = 2$, soit $x - y + z = -2$, strictement parallèle à P_2. Intersection vide.
— $m \notin \{-1, 1, 2\}$: les normales sont deux à deux non colinéaires, les plans se coupent deux à deux selon des droites parallèles à D (car w est orthogonal à $(m, 1, m)$: $-m + m = 0$), sans point commun : configuration en **prisme**.

Réponse. Rang 2 pour tout m ; $m = 2$: faisceau d'axe D ; $m = \pm 1$: deux plans parallèles, vide ; sinon prisme, vide.

Correction de l'exercice 6 – Famille de droites et point fixe

a) On ordonne selon les puissances de m :

$$(x + y - 2) + m(y - x) = 0$$

— Cette égalité vaut pour tout m si et seulement si les deux coefficients sont nuls : $x + y = 2$ et $y = x$, d'où $\Omega = (1, 1)$. Contrôle : $(1 - m) + (1 + m) = 2$.

b) Le déterminant du système vaut

$$(1 - m)(1 + m') - (1 + m)(1 - m') = 2(m' - m) \neq 0$$

— Le système est de Cramer, et Ω en est une solution par a) : c'est **l'unique** solution. Deux droites distinctes de la famille se coupent en Ω et seulement là.

c) Une droite passant par Ω a une équation $\alpha(x + y - 2) + \beta(y - x) = 0$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ (elle est combinaison de deux droites distinctes par Ω). Si $\alpha \neq 0$, on divise par α : c'est D_m avec $m = \beta / \alpha$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Si $\alpha = 0$: c'est la droite $y = x$, qui **n'est pas** dans la famille (elle correspond à « $m = \infty$ »). La famille (D_m) est le faisceau de droites de centre Ω, privé de la droite $y = x$.

Réponse. $\Omega = (1, 1)$; deux droites distinctes se coupent seulement en Ω ; toutes les droites par Ω sauf $y = x$.

Correction de l'exercice 7 – Système cyclique à paramètre

a) On substitue de proche en proche : $y = a - x$, $z = b - y = b - a + x$, $t = c - z = c - b + a - x$.

b) La dernière équation devient $c - b + a - x + \lambda x = d$, soit

$$(\lambda - 1)\, x = d - c + b - a$$

— $\lambda \neq 1$: $x = \dfrac{d - c + b - a}{\lambda - 1}$, puis y, z, t par a) : **solution unique**.

— $\lambda = 1$: compatible si et seulement si $a - b + c - d = 0$; alors x est libre.

c) Pour $\lambda = 1$, la somme alternée des équations donne $(x + y) - (y + z) + (z + t) - (t + x) = 0$: les membres de gauche ont une **somme alternée nulle**, donc les seconds membres aussi. Solutions :

— $\{(x,\ a - x,\ b - a + x,\ c - b + a - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, droite affine dirigée par $(1, -1, 1, -1)$.

— Contrôle avec $a = b = c = d = 2$ et $x = 0$: $(0, 2, 0, 2)$ vérifie les quatre équations.

d) $\lambda = -1 \neq 1$: solution unique, $x = \dfrac{a - b + c - d}{2}$. Contrôle avec $a = b = c = d = 2$: $x = 0$, $(0, 2, 0, 2)$ et $t - x = 2$. Seule la valeur $\lambda = 1$ est critique.

Réponse. $(\lambda - 1)x = d - c + b - a$; $\lambda \neq 1$: unique ; $\lambda = 1$: compatible $\Leftrightarrow a - b + c - d = 0$, droite de direction $(1, -1, 1, -1)$.

Correction de l'exercice 8 – Système de taille n : I plus lambda J

a) La somme des n équations donne $S + n\lambda S = \sum_i b_i$, soit

$$(1 + n\lambda)\, S = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

b) Si $1 + n\lambda \neq 0$, $S = \dfrac{\sum b_i}{1 + n\lambda}$ est **imposé**, et chaque équation donne

— $x_i = b_i - \lambda S = b_i - \dfrac{\lambda \sum_j b_j}{1 + n\lambda}$.

— **Réciproque** : ces x_i ont pour somme $\sum b_i - n\lambda S = S$ par a), donc ils vérifient bien $x_i + \lambda S = b_i$. Solution unique.

c) Si $\lambda = -\frac{1}{n}$, a) devient $0 = \sum b_i$: condition **nécessaire**. Si elle est vérifiée, on cherche les solutions sous la forme $x = b + \mu(1, \ldots, 1)$: alors $S = \sum b_i + n\mu = n\mu$ et

$$x_i - \frac{1}{n} S = b_i + \mu - \mu = b_i$$

— Ce sont des solutions pour tout μ ; comme le système homogène a pour solutions les vecteurs **constants** ($x_i = \frac{S}{n}$ pour tout i), ce sont toutes les solutions : une droite.

— Si $\sum b_i \neq 0$: aucune solution.

d) $S = \dfrac{6}{1 + 3} = \dfrac{3}{2}$, donc $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Contrôle : $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$, $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$.

Réponse. $\lambda \neq -\frac{1}{n}$: $x_i = b_i - \dfrac{\lambda \sum b_j}{1 + n\lambda}$; $\lambda = -\frac{1}{n}$: compatible $\Leftrightarrow \sum b_i = 0$, solutions

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$b+\mu(1,\dots,1)$; d) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 9 – Réel ou complexe : le paramètre compte

a) $L_2 : y=-mz$; $L_1 : x=-my=m^2z$. Dans L_3 :

$$m\cdot m^2z+z=(1+m^3)z=0$$

— Si $1+m^3\neq 0$, alors $z=0$, puis $y=x=0$: seule la solution nulle.
— Si $1+m^3=0$, z est libre : solutions non nulles $(m^2z,-mz,z)$.

b) Dans $\mathbb{R}$: $m^3=-1\Leftrightarrow m=-1$ (la fonction cube est bijective).

— Dans $\mathbb{C}$: $m^3=-1\Leftrightarrow(-m)^3=1\Leftrightarrow -m\in\{1,j,j^2\}$, soit $m\in\{-1,-j,-j^2\}$ avec $j=\mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

c) Les solutions sont $z(m^2,-m,1)$, $z\in\mathbb{C}$:

— $m=-1$: $\mathrm{Vect}(1,1,1)$;
— $m=-j$: $m^2=j^2$, $\mathrm{Vect}(j^2,j,1)$;
— $m=-j^2$: $m^2=j^4=j$, $\mathrm{Vect}(j,j^2,1)$.
— Contrôle pour $m=-j$: $L_1 : j^2-j\cdot j=0$; $L_2 : j-j=0$; $L_3 : -j\cdot j^2+1=-j^3+1=0$.
— **Leçon** : sur $\mathbb{R}$, une seule valeur critique ; sur $\mathbb{C}$, trois. Le corps fait partie de l'énoncé.

Réponse. Solutions non nulles $\Leftrightarrow m^3=-1$: $m=-1$ sur $\mathbb{R}$; $m\in\{-1,-j,-j^2\}$ sur $\mathbb{C}$, solutions $\mathrm{Vect}(m^2,-m,1)$.

Correction de l'exercice 10 – Selon le corps de base

a) $L_2\leftarrow L_2-3L_1$ donne $-5y=0$. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, -5 est **inversible** si et seulement si $p\nmid 5$, c'est-à-dire $p\neq 5$:

— $p\neq 5$: $y=0$ puis $x=0$, seule la solution nulle ;
— $p=5$: $-5=0$, y est libre et $x=-2y=3y$. Solutions : $\{(3y,y)\}$, soit $(0,0),(3,1),(1,2),(4,3),(2,4)$: $5=5^{2-1}$ solutions.
— Contrôle de $(3,1)$: $3+2=5\equiv 0$ et $9+1=10\equiv 0$.

b) Dans $\mathbb{Q}$: $-5y=1-3=-2$, donc $y=\frac{2}{5}$ et $x=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

c) Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $5y=2$; l'inverse de 5 est 3 car $5\times 3=15\equiv 1$, donc

$$y=3\times 2=6,\qquad x=1-2\times 6=-11\equiv 3$$

— Contrôle : $3+12=15\equiv 1$ et $9+6=15\equiv 1$.
— Comparaison : $\frac{1}{5}\equiv 3$ et $\frac{2}{5}\equiv 6$ modulo 7 — la solution rationnelle **se réduit** modulo 7 parce que son dénominateur 5 est inversible.
— Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: la ligne devient $0=-2\neq 0$, le système est **incompatible** : le dénominateur 5 de la solution rationnelle est justement nul.

Réponse. Solutions homogènes non nulles seulement pour $p=5$: $\{(3y,y)\}$; dans $\mathbb{Q}$: $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$; dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $(3,6)$; dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: aucune.

Correction de l'exercice 11 – Les valeurs de lambda qui font chuter le rang

a) $AX=\lambda X\Leftrightarrow(A-\lambda I_3)X=0$, soit avec $\mu=2-\lambda$:

$$\begin{cases}\mu x+y=0\\ x+\mu y+z=0\\ y+\mu z=0\end{cases}$$

b) L_1 et L_3 donnent $y=-\mu x=-\mu z$; si $\mu\neq 0$, $x=z$. Alors L_2 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$x - \mu^2 x + x = (2 - \mu^2)\,x = 0$$

— Si $\mu^2 \neq 2$: $x = 0$, puis $z = 0$ et $y = 0$; seule la solution nulle.
— Si $\mu = \pm\sqrt{2}$: x libre, $y = -\mu x$, $z = x$: solutions $x(1, -\mu, 1)$.

c) $\mu = 0$: $y = 0$ (L_1) et $x + z = 0$ (L_2) : solutions $x(1, 0, -1)$.

— **Bilan** ($\lambda = 2 - \mu$) :
— $\lambda = 2$: Vect$(1, 0, -1)$;
— $\lambda = 2 - \sqrt{2}$ ($\mu = \sqrt{2}$) : Vect$(1, -\sqrt{2}, 1)$;
— $\lambda = 2 + \sqrt{2}$ ($\mu = -\sqrt{2}$) : Vect$(1, \sqrt{2}, 1)$.
— Contrôle pour $\lambda = 2 + \sqrt{2}$: $A(1, \sqrt{2}, 1) = (2 + \sqrt{2},\ 2 + 2\sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})(1, \sqrt{2}, 1)$ car $(2 + \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2$.
— Ces λ sont les **valeurs propres** de A (chapitre de réduction, en seconde année).

Réponse. $\lambda \in \{2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}\}$, solutions Vect$(1, \sqrt{2}, 1)$ pour $2 + \sqrt{2}$, $(1, 0, -1)$ pour 2, $(1, -\sqrt{2}, 1)$ pour $2 - \sqrt{2}$.

Correction de l’exercice 12 – Second membre paramétré : Fourier à trois points

a) $j^3 = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$, et j est racine de $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ avec $j \neq 1$, donc $1 + j + j^2 = 0$.

b) x : dans la somme des trois lignes, le coefficient de y est $1 + j + j^2 = 0$, de même pour z, et celui de x vaut 3 :

$$x = \frac{a + b + c}{3}$$

— y : $L_1 + j^2 L_2 + jL_3$; coefficient de y : $1 + j^3 + j^3 = 3$; de x : $1 + j^2 + j = 0$; de z : $1 + j^4 + j^2 = 1 + j + j^2 = 0$. D’où $y = \dfrac{a + j^2 b + jc}{3}$.
— z : $L_1 + jL_2 + j^2 L_3$; coefficient de z : $1 + j^3 + j^3 = 3$, les autres nuls de même. D’où $z = \dfrac{a + jb + j^2 c}{3}$.

c) Pour $(a, b, c) = (3, 0, 0)$: $x = y = z = 1$, et en effet $1 + 1 + 1 = 3$, $1 + j + j^2 = 0$, $1 + j^2 + j = 0$.

— Pour **tout** second membre on a obtenu une solution, et elle est unique puisqu’elle est imposée par des combinaisons des équations : le système est de Cramer, la matrice est inversible. Son inverse s’écrit $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$: c’est la **transformée de Fourier discrète** d’ordre 3.

Réponse. $x = \dfrac{a + b + c}{3}$, $y = \dfrac{a + j^2 b + jc}{3}$, $z = \dfrac{a + jb + j^2 c}{3}$.

Correction de l’exercice 13 – Paramètres a, b, c : un système de Vandermonde

a) Notons $L_a = \dfrac{(X - b)(X - c)}{(a - b)(a - c)}$, L_b, L_c les polynômes de Lagrange associés à a, b, c : $L_a(a) = 1$, $L_a(b) = L_a(c) = 0$, etc. Pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, le polynôme $Q(a)L_a + Q(b)L_b + Q(c)L_c - Q$ est de degré ≤ 2 et s’annule en trois points distincts, donc il est nul :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$Q(d) = Q(a)L_a(d) + Q(b)L_b(d) + Q(c)L_c(d)$$

— Avec $x = L_a(d)$, $y = L_b(d)$, $z = L_c(d)$ et $Q = 1, X, X^2$, on obtient exactement les trois équations.

b) Le système homogène $x + y + z = 0$, $ax + by + cz = 0$, $a^2x + b^2y + c^2z = 0$ n'a que la solution nulle : si (x, y, z) en est solution, pour $Q = (X - b)(X - c)$ on a $xQ(a) + yQ(b) + zQ(c) = 0$, soit $x(a - b)(a - c) = 0$, donc $x = 0$; de même $y = z = 0$. La solution est unique.

c) Si $a = b \neq c$, posons $s = x + y$. Les deux premières équations donnent $s = \frac{c - d}{c - a}$ et $z = \frac{d - a}{c - a}$; la troisième impose $a^2s + c^2z = d^2$, soit après calcul

$$(c - a)(d(a + c) - ac - d^2) = 0 \Leftrightarrow (d - a)(d - c) = 0$$

— $d \in \{a, c\}$: infinité de solutions ($x + y = s$ fixé, x libre) ;

— $d \notin \{a, c\}$: aucune solution.

d) $x = \frac{2 \times 1}{(-1)(-2)} = 1$, $y = \frac{3 \times 1}{1 \times (-1)} = -3$, $z = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$. Contrôle : $1 - 3 + 3 = 1$, $1 - 6 + 9 = 4$, $1 - 12 + 27 = 16$.

Réponse. a, b, c distincts : $x = L_a(d)$, $y = L_b(d)$, $z = L_c(d)$ (unique) ; $a = b \neq c$: solutions $\Leftrightarrow d \in \{a, c\}$; d) $(1, -3, 3)$.

Correction de l'exercice 14 – Coefficients indéterminés pour une équation différentielle

a) $y' = 2\alpha x + \beta$ et $y'' = 2\alpha$. En identifiant les coefficients de x^2, x et 1 :

$$\begin{cases} b\alpha = 1 \\ 2a\alpha + b\beta = 0 \\ 2\alpha + a\beta + b\gamma = 0 \end{cases}$$

— Le système est **triangulaire** de diagonale (b, b, b) : si $b \neq 0$, il est de Cramer.

— $\alpha = \frac{1}{b}$, $\beta = -\frac{2a}{b^2}$, $\gamma = \frac{-2\alpha - a\beta}{b} = \frac{2a^2 - 2b}{b^3}$.

— Contrôle avec $a = 0$, $b = 1$: $y = x^2 - 2$, et $y'' + y = 2 + x^2 - 2 = x^2$.

b) Si $b = 0$, la première équation devient $0 = 1$: **aucune** solution de degré ≤ 2. (Ce n'est pas une obstruction à l'existence d'une solution : il faut monter en degré.)

c) $y' = 3\delta x^2 + 2\alpha x + \beta$, $y'' = 6\delta x + 2\alpha$. L'équation $y'' + ay' = x^2$ donne

$$\begin{cases} 3a\delta = 1 \\ 6\delta + 2a\alpha = 0 \\ 2\alpha + a\beta = 0 \end{cases}$$

— Triangulaire de diagonale $(3a, 2a, a)$, de Cramer si $a \neq 0$: $\delta = \frac{1}{3a}$, $\alpha = -\frac{3\delta}{a} = -\frac{1}{a^2}$, $\beta = -\frac{2\alpha}{a} = \frac{2}{a^3}$.

d) $a = 1$: $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x$, $y' = x^2 - 2x + 2$, $y'' = 2x - 2$, et $y'' + y' = x^2$.

Réponse. $b \neq 0$: $y = \frac{x^2}{b} - \frac{2a}{b^2}x + \frac{2a^2 - 2b}{b^3}$; $b = 0$, $a \neq 0$: $y = \frac{x^3}{3a} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{a^3}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un alliage sur mesure

a) Un bilan par métal (en multipliant par 10) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{cases} 6a + 2b + 5c = 400 \\ 4a + 6b + c = 600 - 10p \\ 2b + 4c = 10p \end{cases}$$

— Chaque alliage totalise 100 % : la somme des trois équations donne $10a + 10b + 10c = 1000$, soit $a + b + c = 100$. La masse totale est **conséquence** du système.

b) On remplace L_2 par la relation $a + b + c = 100$ (équivalent, car $L_2 = 10(a + b + c) - L_1 - L_3$).

— L_3 : $b = 5p - 2c$; puis $a = 100 - b - c = 100 - 5p + c$.

— Dans L_1 : $6(100 - 5p + c) + 2(5p - 2c) + 5c = 600 - 20p + 7c = 400$, donc $c = \dfrac{20p - 200}{7}$.

— Puis $b = \dfrac{400 - 5p}{7}$ et $a = \dfrac{500 - 15p}{7}$.

— Le système est de Cramer pour tout p : solution unique.

c) Les masses doivent être **positives** :

$$a \geq 0 \Leftrightarrow p \leq \frac{100}{3}, \qquad b \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 80, \qquad c \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 10$$

— La commande est réalisable si et seulement si $10 \leq p \leq \dfrac{100}{3} \approx 33{,}3$.

d) $p = 24$: $a = \dfrac{140}{7} = 20$, $b = \dfrac{280}{7} = 40$, $c = \dfrac{280}{7} = 40$ kg.

— Cuivre : $12 + 8 + 20 = 40$; zinc : $8 + 24 + 4 = 36 = 60 - 24$; étain : $0 + 8 + 16 = 24$. Total 100 kg.

— **Leçon** : l'algèbre linéaire donne l'unique mélange ; la **positivité**, contrainte physique, restreint le paramètre à un intervalle.

Réponse. $a = \dfrac{500 - 15p}{7}$, $b = \dfrac{400 - 5p}{7}$, $c = \dfrac{20p - 200}{7}$; réalisable pour $10 \leq p \leq \dfrac{100}{3}$; $p = 24$: $(20, 40, 40)$ kg.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).