Plaquette 5 – Modéliser par un système linéaire : géométrie, physique, économie

Systèmes linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Du problème au système, et retour.

— **Interpolation** : il existe un unique polynôme de degré $\leq n$ prenant des valeurs données en $n+1$ points distincts ; ses coefficients sont solution d'un système de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i \qquad (0 \leq i \leq n)$$

— **Cercle** $x^2+y^2+ax+by+c=0$: trois conditions linéaires en (a,b,c) ; centre $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$.

— **Lois de conservation** (nœuds de Kirchhoff, débits, atomes) : le système est **homogène** ou affine, et la dimension de l'ensemble des solutions est $n-\mathrm{rg}$.

— **Modèle de Leontief** : $X=AX+D$, soit $(I-A)X=D$; si $(I-A)^{-1}$ est à coefficients positifs, toute demande positive est réalisable.

— **Moindres carrés** : un système $MX=Y$ incompatible est remplacé par les **équations normales**

$$M^{\mathsf{T}}MX = M^{\mathsf{T}}Y$$

qui donnent, pour la droite $y=ax+b$:

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i, \qquad a\sum x_i + nb = \sum y_i$$

— **Méthode des coefficients indéterminés** : on impose l'exactitude sur une base $(1, x, x^2, \ldots)$ et l'on résout le système obtenu.

Correction de l'exercice 1 – La parabole passant par trois points

a) Chaque point donne une équation linéaire en (a,b,c) :

$$\begin{cases} a-b+c=6 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}$$

— L_2-L_1 : $2b=-4$, donc $b=-2$.

— L_1+L_2 : $2a+2c=8$, soit $a+c=4$; L_3 donne $4a+c=3+4=7$.

— Par différence $3a=3$: $a=1$, $c=3$. Donc $f(x)=x^2-2x+3$.

— Contrôle : $f(-1)=1+2+3=6$, $f(1)=2$, $f(2)=3$.

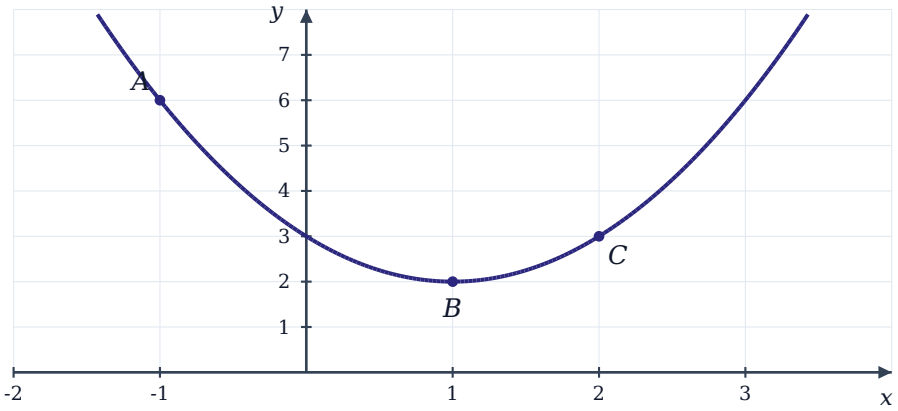
b) Le système homogène associé exprime qu'un polynôme $P=aX^2+bX+c$, de degré ≤ 2, s'annule en trois points distincts. Un polynôme non nul de degré ≤ 2 a au plus 2 racines : donc $P=0$, c'est-à-dire $a=b=c=0$. Le système carré a pour seule solution homogène 0 : il est de Cramer, quel que soit le second membre.

c) Avec quatre conditions et trois inconnues, le système est **surdéterminé** : il est compatible si et seulement si le quatrième point est déjà sur la parabole trouvée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $f(3) = 9 - 6 + 3 = 6$: le point $D'(3, 6)$ est sur la courbe (le système reste compatible, même solution) ; $D(3, 5)$ ne l'est pas (système incompatible : aucune parabole ne passe par A, B, C, D).

Réponse. $f(x) = x^2 - 2x + 3$; compatible avec $D'(3, 6)$, incompatible avec $D(3, 5)$.



Une parabole passe par trois points d'abscisses distinctes.

Correction de l'exercice 2 – Le cercle passant par trois points

a) On complète les carrés :

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

— L'équation équivaut à $\Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ avec $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$: cercle de centre Ω si cette quantité est > 0, le point Ω si elle est nulle, l'ensemble vide si elle est < 0.

b) Les conditions de passage sont **linéaires** en (a, b, c) :

— O : $c = 0$;
— P : $16 + 4a + c = 0$, donc $a = -4$;
— Q : $4 + 2b + c = 0$, donc $b = -2$.
— Équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, soit $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$: centre $\Omega(2, 1)$, rayon $\sqrt{5}$. Contrôle : $\Omega O^2 = 4 + 1 = 5$, $\Omega P^2 = 4 + 1 = 5$, $\Omega Q^2 = 4 + 1 = 5$.

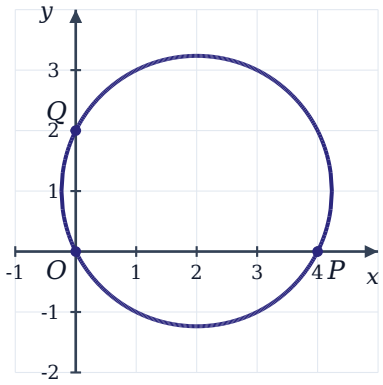
c) O donne $c = 0$; R donne $2 + a + b = 0$; S donne $8 + 2a + 2b = 0$, soit $a + b = -4$, alors que R impose $a + b = -2$. Incompatible : les trois points sont **alignés** (sur $y = x$), et une droite coupe un cercle en au plus deux points.

d) Le centre d'un cercle passant par A, B, C est équidistant des trois points : il est sur les médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$. Si les points ne sont pas alignés, ces médiatrices, perpendiculaires à deux droites sécantes, sont sécantes en un unique point Ω ; le cercle de centre Ω et de rayon ΩA convient, et c'est le seul. En termes de systèmes : le système

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3×3 en (a, b, c) est de Cramer.

Réponse. b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$: centre $(2, 1)$, rayon $\sqrt{5}$; c) incompatible, les points sont alignés.



Le cercle cherché à la question b).

Correction de l’exercice 3 – Lois de Kirchhoff dans un circuit à deux mailles

a) Loi des nœuds en N (ce qui entre égale ce qui sort) : $I_1 + I_2 = I_3$. Loi des mailles (la somme des f.é.m. égale la somme des chutes de tension RI) :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 + 2I_3 = 10 \\ 2I_2 + 2I_3 = 8 \end{cases}$$

b) On substitue $I_3 = I_1 + I_2$:

— maille 1 : $I_1 + 2I_1 + 2I_2 = 10$, soit $3I_1 + 2I_2 = 10$;
— maille 2 : $2I_2 + 2I_1 + 2I_2 = 8$, soit $I_1 + 2I_2 = 4$;
— par différence : $2I_1 = 6$, donc $I_1 = 3$ A, puis $I_2 = \dfrac{4 - 3}{2} = 0{,}5$ A et $I_3 = 3{,}5$ A.

c) Puissance fournie : $E_1 I_1 + E_2 I_2 = 30 + 4 = 34$ W. Puissance dissipée :

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 9 + 0{,}5 + 24{,}5 = 34 \text{ W}$$

— Le bilan est équilibré, ce qui valide la résolution.

d) En gardant E_2 littéral, $I_2 = 0$ donne $I_3 = I_1$, puis $3I_1 = 10$ et $2I_1 = E_2$: $I_1 = \dfrac{10}{3}$ A et $E_2 = \dfrac{20}{3} \approx 6{,}67$ V. Le générateur 2 compense exactement la tension aux bornes de R_3 : il ne débite plus.

Réponse. $I_1 = 3$ A, $I_2 = 0{,}5$ A, $I_3 = 3{,}5$ A ; bilan 34 W ; $I_2 = 0$ pour $E_2 = \dfrac{20}{3}$ V.

Correction de l’exercice 4 – Le modèle entrée-sortie de Leontief

a) La production agricole x sert à trois usages : la consommation de l’agriculture elle-même ($0{,}2x$), celle de l’industrie ($0{,}3y$) et la demande finale (60). De même pour l’industrie :

$$\begin{cases} x = 0{,}2x + 0{,}3y + 60 \\ y = 0{,}4x + 0{,}1y + 30 \end{cases} \Leftrightarrow X = AX + D$$

b) $(I - A)X = D$ s’écrit $0{,}8x - 0{,}3y = 60$ et $-0{,}4x + 0{,}9y = 30$.

— $L_1 + 2L_2$: $1{,}5y = 120$, donc $y = 80$.
— Puis $0{,}8x = 60 + 24 = 84$, donc $x = 105$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Contrôle : $0{,}2\times 105+0{,}3\times 80+60=21+24+60=105$.

c) Pour une matrice 2×2, $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix}s & -q\\ -r & p\end{pmatrix}$ (si $ps-qr\neq 0$). Ici $ps-qr=0{,}72-0{,}12=0{,}6$:

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}6}\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5 & 0{,}5\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

— Tous les coefficients sont positifs : si $D\geq 0$ (composante par composante), $X=(I-A)^{-1}D\geq 0$. Contrôle : $1{,}5\times 60+0{,}5\times 30=105$ et $\frac{2}{3}\times 60+\frac{4}{3}\times 30=80$.

d) Par linéarité, $\Delta X=(I-A)^{-1}\Delta D$ avec $\Delta D=(0,10)$: c'est 10 fois la deuxième colonne, soit $\Delta x=5$ et $\Delta y=\frac{40}{3}\approx 13{,}3$ millions. L'agriculture doit produire plus, bien que la demande nouvelle soit industrielle : c'est l'**effet d'entraînement** entre secteurs, et l'industrie produit plus que les 10 millions demandés.

Réponse. $X=(105,80)$; $(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}5 & 0{,}5\\ 2/3 & 4/3\end{pmatrix}\geq 0$; hausses de 5 et $\frac{40}{3}$ millions.

Correction de l'exercice 5 – Droite des moindres carrés

a) Avec $M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\\ 5\end{pmatrix}$. Les deux premières équations donnent $b=1$, $a=1$, et la troisième devient $3=4$: **incompatible**, les points ne sont pas alignés.

b) S est une fonction polynomiale de (a,b) ; en un minimum, ses dérivées partielles s'annulent :

$$\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum x_i(y_i-ax_i-b)=0,\qquad \frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum(y_i-ax_i-b)=0$$

— soit $a\sum x_i^2+b\sum x_i=\sum x_iy_i$ et $a\sum x_i+4b=\sum y_i$.

c) Ici $\sum x_i=6$, $\sum x_i^2=14$, $\sum y_i=12$, $\sum x_iy_i=0+2+8+15=25$:

$$\begin{cases}14a+6b=25\\ 6a+4b=12\end{cases}$$

— $2L_1-3L_2$: $10a=14$, donc $a=1{,}4$; puis $4b=12-8{,}4=3{,}6$, donc $b=0{,}9$.

— Résidus : $1-0{,}9=0{,}1$; $2-2{,}3=-0{,}3$; $4-3{,}7=0{,}3$; $5-5{,}1=-0{,}1$. Leur somme est nulle (c'est la deuxième équation normale).

— $S_{\min}=0{,}01+0{,}09+0{,}09+0{,}01=0{,}2$.

— (Le point critique est bien un minimum : S est une somme de carrés, qui tend vers $+\infty$ quand $|a|+|b|\to+\infty$, et ce point critique est unique.)

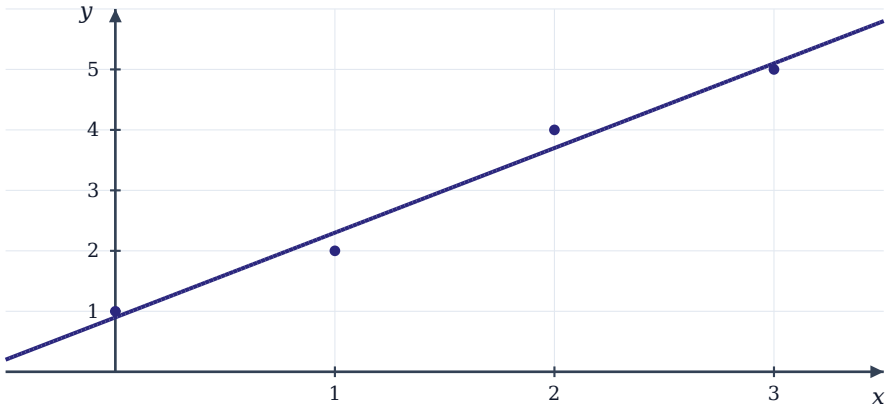
d) $M^{\mathsf T}M=\begin{pmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_i\\ \sum x_i & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 6\\ 6 & 4\end{pmatrix}$ et $M^{\mathsf T}Y=\begin{pmatrix}\sum x_iy_i\\ \sum y_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\ 12\end{pmatrix}$: c'est bien le système de c).

Un système **incompatible** $MX=Y$ est ainsi remplacé par un système carré, de Cramer

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

dès que les x_i ne sont pas tous égaux.

Réponse. Système incompatible ; équations normales $14a + 6b = 25$, $6a + 4b = 12$; $y = 1{,}4x + 0{,}9$; $S_{\min} = 0{,}2$.



La droite des moindres carrés $y = 1{,}4x + 0{,}9$.

Correction de l’exercice 6 – Construire la formule de Simpson

a) L’intégrale et la formule sont toutes deux **linéaires** en f : si elles coïncident sur 1, t, t^2, elles coïncident sur toute combinaison linéaire $a + bt + ct^2$. Les trois conditions donnent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t = 2 \\ -\alpha + \gamma = \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0 \\ \alpha + \gamma = \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

— L_2 et L_3 : $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$; puis $\beta = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

— Formule de Simpson : $\int_{-1}^{1} f \approx \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1))$.

b) Pour t^3 : l’intégrale vaut 0 (fonction impaire), et la formule donne $\frac{1}{3}(-1 + 0 + 1) = 0$: **exacte**, par symétrie, bien qu’on ne l’ait pas imposé. Pour t^4 : l’intégrale vaut $\frac{2}{5}$, la formule $\frac{1}{3}(1 + 0 + 1) = \frac{2}{3}$: inexacte. La formule est exacte jusqu’au degré 3.

c) On pose $x = m + ht$ avec $m = \frac{a+b}{2}$ et $h = \frac{b-a}{2}$, d’où $\mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\int_{-1}^{1} f(m + ht)\,\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

d) Valeur exacte : $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} \approx 2{,}35040$. Formule : $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-1} + 4 + \mathrm{e}) \approx \frac{1}{3}(0{,}36788 + 4 + 2{,}71828) \approx 2{,}36205$. L’erreur est d’environ $0{,}0117$, soit $0{,}5\,\%$ avec trois évaluations seulement.

Réponse. $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$; exacte jusqu’au degré 3 ; $\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$; $2{,}36205$ contre $2{,}35040$.

Correction de l’exercice 7 – Équilibrer une réaction chimique

a) Conservation du carbone, de l’hydrogène et de l’oxygène : un système **homogène** de 3 équations à 4 inconnues.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{cases} 3a = c \\ 8a = 2d \\ 2b = 2c + d \end{cases}$$

— On exprime tout en fonction de a : $c = 3a$, $d = 4a$, $b = \frac{2c+d}{2} = \frac{6a+4a}{2} = 5a$.

— Les trois équations sont indépendantes (chacune introduit une nouvelle inconnue) : rang 3, ensemble des solutions de dimension $4 - 3 = 1$, la droite engendrée par $(1, 5, 3, 4)$.

— Avec $a = 1$: $\mathrm{C_3H_8} + 5\,\mathrm{O_2} \to 3\,\mathrm{CO_2} + 4\,\mathrm{H_2O}$. Contrôle de l'oxygène : $10 = 6 + 4$.

b) Les équations deviennent $3a = c + d$ (carbone), $8a = 2e$ (hydrogène), $2b = c + 2d + e$ (oxygène) : 3 équations indépendantes, 5 inconnues, donc une solution générale à **deux paramètres**.

— $e = 4a$ et $c = 3a - d$, puis $2b = 3a - d + 2d + 4a = 7a + d$.

— Solutions : $\left(a,\ \frac{7a+d}{2},\ 3a - d,\ d,\ 4a\right)$, avec (a, d) quelconques ; dimension $5 - 3 = 2$.

— Exemples : $d = 3a$ redonne la combustion complète ; $d = 0$ donne $2\,\mathrm{C_3H_8} + 7\,\mathrm{O_2} \to 6\,\mathrm{CO} + 8\,\mathrm{H_2O}$.

c) Un ensemble de dimension 2 signifie que l'équation-bilan n'est **pas unique** : les solutions sont les combinaisons de deux réactions indépendantes (combustion complète et combustion en CO). La proportion de CO dépend de l'apport en dioxygène, pas de la seule conservation des atomes. Les coefficients chimiques doivent en outre être **positifs** : $0 \le d \le 3a$.

Réponse. a) $\mathrm{C_3H_8} + 5\,\mathrm{O_2} \to 3\,\mathrm{CO_2} + 4\,\mathrm{H_2O}$, dimension 1 ; b) $\left(a, \frac{7a+d}{2}, 3a - d, d, 4a\right)$, dimension 2.

Correction de l'exercice 8 – Prestations réciproques entre services

a) Le coût complet de l'entretien est son coût propre, plus la part de l'informatique qu'il consomme ; de même pour l'informatique :

$$\begin{cases} x = 9\,300 + 0{,}1y \\ y = 5\,000 + 0{,}2x \end{cases}$$

— En substituant : $x = 9\,300 + 500 + 0{,}02x$, donc $0{,}98x = 9\,800$ et $x = 10\,000$ €.

— Puis $y = 5\,000 + 2\,000 = 7\,000$ €.

b) Chaque service reçoit sa part des coûts complets :

— atelier : $40\,000 + 0{,}5 \times 10\,000 + 0{,}6 \times 7\,000 = 40\,000 + 5\,000 + 4\,200 = 49\,200$ € ;

— distribution : $25\,000 + 0{,}3 \times 10\,000 + 0{,}3 \times 7\,000 = 25\,000 + 3\,000 + 2\,100 = 30\,100$ €.

c) Total après répartition : $49\,200 + 30\,100 = 79\,300$ €. Total initial : $9\,300 + 5\,000 + 40\,000 + 25\,000 = 79\,300$ €. Conservation : chaque service auxiliaire répartit **100 %** de son coût complet ($20 + 50 + 30$ et $10 + 60 + 30$), et la part qui revient à un autre service auxiliaire est elle-même redistribuée. Le système linéaire exprime exactement cet équilibre.

d) Si l'on répartit d'abord E, une partie de son coût part vers I ; mais I renvoie ensuite 10 % de son coût vers E, qui a déjà été vidé… et il faudrait recommencer indéfiniment. Les prestations sont **croisées** : les coûts complets sont les solutions d'un système, ou la limite de cette cascade (une série géométrique de raison 0,02), qu'on obtient d'un coup en résolvant le système.

Réponse. $x = 10\,000$ €, $y = 7\,000$ € ; atelier 49 200 €, distribution 30 100 € ; total 79 300 € conservé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Température d'une plaque : la propriété de la moyenne

a) Chaque nœud supérieur a deux voisins intérieurs, un voisin sur le bord du haut (100 °C) et un voisin sur un bord latéral (0 °C) ; chaque nœud inférieur a deux voisins intérieurs et deux voisins à 0 °C :

$$\begin{cases} 4T_1 = 100 + T_2 + T_3 \\ 4T_2 = 100 + T_1 + T_4 \\ 4T_3 = T_1 + T_4 \\ 4T_4 = T_2 + T_3 \end{cases}$$

b) La situation est symétrique par rapport à l'axe vertical de la plaque : si (T_1, T_2, T_3, T_4) est solution, (T_2, T_1, T_4, T_3) l'est aussi (on vérifie que le système est inchangé). Par unicité, $T_1 = T_2 = a$ et $T_3 = T_4 = b$.

— Le système se réduit à $4a = 100 + a + b$ et $4b = a + b$, soit $a = 3b$.

— Puis $12b = 100 + 3b + b$, donc $8b = 100$: $b = 12{,}5$ °C et $a = 37{,}5$ °C.

c) Quand les quatre bords sont à 100 °C, $T_i = 100$ pour tout i est solution (chaque moyenne vaut 100), c'est donc **la** solution. Par ailleurs, par **superposition** (le système est linéaire en les données du bord), cette solution est la somme des quatre solutions « un seul bord chaud ». Ces quatre solutions se déduisent l'une de l'autre par rotation de la plaque, de sorte que la moyenne des quatre T_i est la même dans chaque cas, et vaut donc $\frac{100}{4} = 25$ °C. Contrôle : $\frac{37{,}5 + 37{,}5 + 12{,}5 + 12{,}5}{4} = 25$.

d) Soit T_k la plus grande température intérieure, et M la plus grande température au bord. Si $T_k > M$, alors T_k est aussi supérieure ou égale à chacun de ses voisins ; comme elle est leur moyenne, ils sont tous égaux à T_k. De proche en proche, on atteint un nœud du bord de température $T_k > M$: contradiction. Donc $\max T_i \le M$: c'est le **principe du maximum**, qui garantit aussi l'unicité admise au b) (la différence de deux solutions vaut 0 au bord, donc son maximum et son minimum sont nuls).

Réponse. $T_1 = T_2 = 37{,}5$ °C, $T_3 = T_4 = 12{,}5$ °C ; moyenne 25 °C, quart de 100 par superposition.

Correction de l'exercice 10 – Vélos en libre-service : la répartition d'équilibre

a) Les vélos présents en A le jour $n+1$ viennent de A, B ou C :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}2b_n + 0{,}2c_n \\ b_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}7b_n + 0{,}2c_n \\ c_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}1b_n + 0{,}6c_n \end{cases}$$

b) Stationnarité : $a = 0{,}6a + 0{,}2b + 0{,}2c$, etc., soit le système homogène

$$\begin{cases} -0{,}4a + 0{,}2b + 0{,}2c = 0 \\ 0{,}3a - 0{,}3b + 0{,}2c = 0 \\ 0{,}1a + 0{,}1b - 0{,}4c = 0 \end{cases}$$

— La somme des trois équations est nulle : dans chaque colonne, $-0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0$, $0{,}2 - 0{,}3 + 0{,}1 = 0$, $0{,}2 + 0{,}2 - 0{,}4 = 0$ (chaque vélo va quelque part, les probabilités de départ somment à 1). Le rang est au plus 2, et le système homogène a des solutions non nulles.

c) On garde L_1 et L_3 et on ajoute la condition $a + b + c = 1$:

— $L_1 \times 5$: $2a = b + c$, donc $2a = 1 - a$ et $a = \frac{1}{3}$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $L_3 \times 10$: $a + b = 4c$, donc $1 - c = 4c$ et $c = \frac{1}{5}$;

— $b = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$.

— Répartition $\left(\frac{5}{15}, \frac{7}{15}, \frac{3}{15}\right)$. Contrôle sur L_2 :
$0{,}3 \times \frac{5}{15} - 0{,}3 \times \frac{7}{15} + 0{,}2 \times \frac{3}{15} = \frac{1{,}5 - 2{,}1 + 0{,}6}{15} = 0$.

d) Avec 150 vélos : 50 en A, 70 en B, 30 en C. Il faut au moins ces capacités (en pratique davantage, car la répartition fluctue d'un jour à l'autre autour de cet équilibre).

Réponse. Répartition stationnaire $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{15}, \frac{1}{5}\right)$; 50, 70 et 30 vélos.

Correction de l'exercice 11 – Raccorder deux voies par une cubique

a) Deux conditions de position et deux de pente, avec $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$:

$$\begin{cases} p(0) = d = 0 \\ p'(0) = c = 0 \\ p(2) = 8a + 4b + 2c + d = 2 \\ p'(2) = 12a + 4b + c = 1 \end{cases}$$

b) $c = d = 0$, puis $8a + 4b = 2$ et $12a + 4b = 1$. Par différence : $4a = -1$, soit $a = -\frac{1}{4}$, et $4b = 2 + 2 = 4$, soit $b = 1$.

— $p(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$.

— Vérification : $p(2) = 4 - 2 = 2$ et $p'(x) = 2x - \frac{3}{4}x^2$, donc $p'(2) = 4 - 3 = 1$, pente de la droite $y = x$.

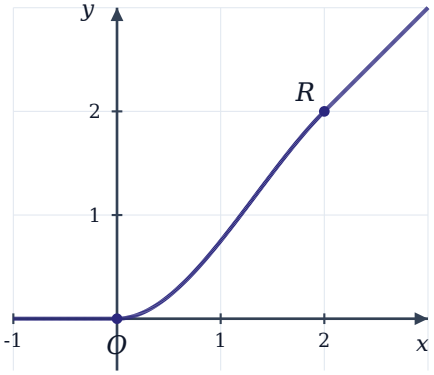
c) Le système général est $d = y_0$, $c = s_0$, puis

$$\begin{cases} 8a + 4b = y_1 - 2s_0 - y_0 \\ 12a + 4b = s_1 - s_0 \end{cases}$$

— On obtient $4a = s_1 - s_0 - (y_1 - 2s_0 - y_0)$, puis b : une unique solution pour tout second membre. Le système 4×4 est **triangulaire par blocs** et de Cramer (c'est l'interpolation de Hermite).

d) Une parabole n'a que trois coefficients pour quatre conditions : le système est surdéterminé. Avec $a = 0$, les deux dernières équations imposent $4b = 2$ et $4b = 1$: incompatibles. Il faut un degré de liberté par condition, d'où la cubique.

Réponse. $p(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$; système de Cramer pour toutes données ; la parabole donne un système incompatible.



Les deux voies et le raccord cubique (trait épais).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Poutre sur appuis : isostatique ou hyperstatique

a) L'équilibre d'un solide impose une résultante nulle et un moment nul (ici par rapport à A, bras de levier mesurés depuis A) :

$$\begin{cases} R_A + R_B = 1\,200 \\ 4R_B - 1 \times 1\,200 = 0 \end{cases}$$

— $R_B = 300$ N, puis $R_A = 900$ N. Le système est de Cramer : la poutre est **isostatique**. Contrôle par les moments en B : $4R_A = 3 \times 1\,200$, soit $R_A = 900$.

b) Avec l'appui C à 2 m de A, les équations deviennent

$$\begin{cases} R_A + R_C + R_B = 1\,200 \\ 2R_C + 4R_B = 1\,200 \end{cases}$$

— Deux équations indépendantes (les lignes ne sont pas proportionnelles), trois inconnues : rang 2, solutions à **un paramètre**. Avec $R_B = t$: $R_C = 600 - 2t$ et $R_A = 1\,200 - t - 600 + 2t = 600 + t$.

— $S = \{(600 + t,\ 600 - 2t,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Un moment par rapport à un autre point ne donne rien de neuf : c'est une combinaison des deux équations.

c) Il faut $R_B = t \geq 0$, $R_C = 600 - 2t \geq 0$ et $R_A = 600 + t \geq 0$, soit $0 \leq t \leq 300$. Pour $t = 300$, $R_C = 0$: on retrouve la situation a), l'appui central ne travaille pas ; pour $t = 0$, c'est l'appui B qui ne porte rien.

d) La statique du solide rigide fournit **moins d'équations que d'inconnues** : la poutre est **hyperstatique** (de degré 1). Les réactions réelles dépendent de la **déformation** de la poutre : il faut ajouter une équation de comportement (flexion élastique, condition de flèche nulle en C), qui sélectionne une valeur de t dans l'intervalle trouvé.

Réponse. a) $R_A = 900$ N, $R_B = 300$ N ; b) rang 2 : $(600 + t, 600 - 2t, t)$; c) $0 \leq t \leq 300$; hyperstatique.

Correction de l'exercice 13 – Composer un repas équilibré

a) Un bilan par nutriment, chaque aliment contribuant proportionnellement à sa quantité :

$$\begin{cases} 3r + 9\ell + 25f = 58 \\ 28r + 20\ell = 180 \\ 30f = 30 \end{cases}$$

— La troisième équation donne $f = 1$ (soit 100 g de fromage).

— Il reste $3r + 9\ell = 33$, soit $r + 3\ell = 11$, et $28r + 20\ell = 180$, soit $7r + 5\ell = 45$.

— $7(r + 3\ell) - (7r + 5\ell) = 77 - 45$: $16\ell = 32$, donc $\ell = 2$ et $r = 5$.

— Repas : 500 g de riz, 200 g de lentilles, 100 g de fromage. Contrôle : protéines $15 + 18 + 25 = 58$, glucides $140 + 40 = 180$.

b) Pour une cible quelconque, $f = \frac{\lambda}{30}$, puis le système en (r, ℓ) :

$$\begin{cases} 3r + 9\ell = p - \frac{25\lambda}{30} \\ 28r + 20\ell = g \end{cases}$$

— Ses deux lignes ne sont pas proportionnelles ($3 \times 20 - 9 \times 28 = -192 \neq 0$) : il a une unique solution. Le système 3×3 est de Cramer.

— En notant $p' = p - \frac{5\lambda}{6}$: $\ell = \dfrac{28p' - 3g}{192}$ et $r = \dfrac{9g - 20p'}{192}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Cible $(40, 180, 30)$: $f = 1$, $p' = 15$, $\ell = \frac{420 - 540}{192} = -0{,}625$. Une quantité **négative** de lentilles n'a pas de sens : la cible est inatteignable avec ces aliments. L'algèbre donne toujours une solution, mais la contrainte physique $r, \ell, f \geq 0$ restreint les cibles réalisables (ici, trop peu de protéines pour autant de glucides).

Réponse. a) $r = 5$, $\ell = 2$, $f = 1$ (500 g, 200 g, 100 g) ; c) $\ell = -0{,}625 < 0$: cible irréalisable.

Correction de l'exercice 14 – Débits dans un réseau de canalisations

a) En chaque nœud, le débit entrant égale le débit sortant :

$$\begin{cases} A : x_1 + x_2 = 100 \\ B : x_1 = x_3 + x_4 \\ C : x_2 + x_3 = x_5 + 40 \\ D : x_4 + x_5 = 60 \end{cases}$$

b) La somme des quatre équations, écrites « entrant − sortant = 0 », donne $100 - 40 - 60 = 0$: chaque débit x_i apparaît une fois entrant et une fois sortant. L'équation en D est donc conséquence des trois autres.

— $x_3 = s$, $x_5 = t$: l'équation en C donne $x_2 = 40 + t - s$; celle en A donne $x_1 = 60 - t + s$; celle en B donne $x_4 = x_1 - x_3 = 60 - t$.

— $S = \{(60 + s - t,\ 40 - s + t,\ s,\ 60 - t,\ t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$. Contrôle en D : $60 - t + t = 60$.

c) Contraintes $0 \leq x_i \leq 50$. D'abord, $x_1 + x_2 = 100$ avec $x_1 \leq 50$ et $x_2 \leq 50$ impose

$$x_1 = x_2 = 50$$

— les 100 L/s entrants saturent les deux canalisations issues de A. Avec les paramètres : $60 + s - t = 50$, soit $s = t - 10$.

— Il reste $x_3 = t - 10$, $x_4 = 60 - t$, $x_5 = t$, et les contraintes $0 \leq t - 10 \leq 50$, $0 \leq 60 - t \leq 50$, $0 \leq t \leq 50$, qui se résument à $10 \leq t \leq 50$.

— Répartitions possibles : $(50,\ 50,\ t - 10,\ 60 - t,\ t)$ pour $10 \leq t \leq 50$. Par exemple $t = 30$ donne $(50, 50, 20, 30, 30)$; contrôle en B : $50 = 20 + 30$, en C : $50 + 20 = 30 + 40$.

d) Deux paramètres libres : le réseau a 5 canalisations et 4 nœuds, et le rang du système est 3, d'où $5 - 3 = 2$ degrés de liberté. Ils correspondent aux **deux boucles indépendantes** $A \to B \to C$ et $B \to C \to D$: on peut faire circuler un débit supplémentaire le long d'une boucle sans changer les bilans aux nœuds.

Réponse. $S = \{(60 + s - t, 40 - s + t, s, 60 - t, t)\}$; sous contraintes : $x_1 = x_2 = 50$, $x_3 = t - 10$, $x_4 = 60 - t$, $x_5 = t$, $10 \leq t \leq 50$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la conique passant par cinq points

a) Multiplier l'équation par $k \neq 0$ ne change pas l'ensemble de ses solutions : une conique est définie par son sextuplet **à un facteur près**, soit $6 - 1 = 5$ degrés de liberté. Chaque point impose une condition linéaire : on attend qu'il en faille cinq.

b) Les conditions de passage, linéaires en (a, b, c, d, e, f) :

— $(\pm 2, 0)$: $4a \pm 2d + f = 0$, d'où $d = 0$ et $f = -4a$;

— $(0, \pm 1)$: $c \pm e + f = 0$, d'où $e = 0$ et $c = -f = 4a$;

— $\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$: $\frac{36}{25}a + \frac{24}{25}b + \frac{16}{25}c + f = 0$, soit en multipliant par 25 :

$$36a + 24b + 64a - 100a = 0 \Leftrightarrow 24b = 0$$

— Donc $b = 0$ et les solutions sont $a(1, 0, 4, 0, 0, -4)$, $a \neq 0$: une **unique conique**, $x^2 + 4y^2 = 4$, c'est-à-dire l'ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ de demi-axes 2 et 1. Le cinquième point

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

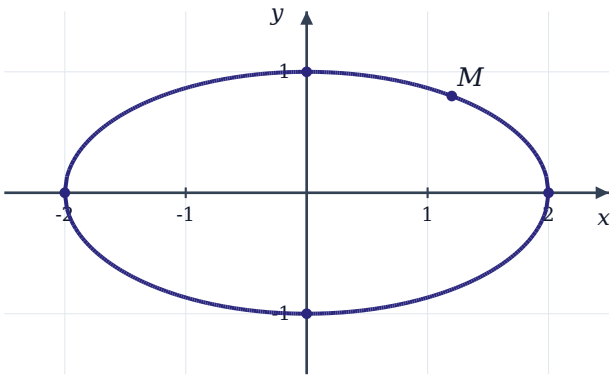
est bien dessus : $\frac{36}{100} + \frac{16}{25} = 1$.

c) Un système homogène à p équations et n inconnues a un ensemble de solutions de dimension $n - \mathrm{rg} \geq n - p$. Ici $n - p = 6 - 5 = 1$: il y a toujours une droite au moins de solutions non nulles. Si cette solution a $a = b = c = 0$, les cinq points sont sur la droite $dx + ey + f = 0$; mais alors le produit de cette équation par celle de n'importe quelle autre droite est une conique (dégénérée) qui convient. Il existe donc toujours une conique passant par cinq points.

d) Les points $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ donnent $f = 0$, $a + d = 0$, $4a + 2d = 0$, donc $a = d = 0$; de même, $(0, 1)$ et $(0, 2)$ donnent $c = e = 0$.

— Il reste $bxy = 0$, avec $b \neq 0$: la conique est la **réunion des deux axes**, conique dégénérée. Elle est unique ici aussi, mais ce n'est pas une « vraie » courbe du second degré : trois points alignés forcent la conique à contenir la droite entière. Pour que cinq points déterminent une conique **non dégénérée**, il faut que trois d'entre eux ne soient jamais alignés.

Réponse. b) unique conique $x^2 + 4y^2 = 4$ (ellipse) ; c) dimension $\geq 6 - 5 = 1$; d) $xy = 0$, réunion des deux axes.



L'ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ passe par les cinq points.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).