Plaquette 1 – Pivot de Gauss, rang, compatibilité et systèmes à paramètre

Systèmes linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire.

— Un système linéaire de p équations à n inconnues s'écrit $AX = B$ avec $A \in M_{p,n}(\mathrm{K})$.

— **Système homogène** : $AX = 0$. Il a toujours au moins la solution nulle ; son ensemble de solutions est un **sous-espace vectoriel** de K^n, de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$.

— **Structure affine** : si X_0 est une solution particulière de $AX = B$, l'ensemble des solutions est

$$X_0 + \{X \mid AX = 0\}$$

Opérations élémentaires (qui conservent l'ensemble des solutions) :

— échanger deux équations : $L_i \leftrightarrow L_j$;

— multiplier une équation par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$;

— ajouter un multiple d'une autre : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Méthode du pivot de Gauss. On échelonne le système, on identifie les **inconnues principales** (celles des pivots) et les **inconnues secondaires** (paramètres libres), puis on remonte.

Discussion.

— **Système de Cramer** : $p = n$ et A inversible $\Leftrightarrow$ solution **unique**.

— **Incompatible** : apparition d'une ligne $0 = c$ avec $c \neq 0$ — aucune solution.

— **Indéterminé** : $\mathrm{rg}(A) = r < n$ et système compatible — l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de **dimension** $n - r$.

— **Théorème du rang (version systèmes)** : nombre d'inconnues = rang + dimension de l'espace des solutions du système homogène.

Correction de l'exercice 1 – Système de Cramer 2x2

Par substitution (rapide en dimension 2) : la seconde équation donne $y = 5x - 3$.

— On reporte : $2x + 3(5x - 3) = 8$, soit $17x - 9 = 8$, donc $x = 1$.

— Puis $y = 5 - 3 = 2$.

— **Solution unique** : $(x, y) = (1, 2)$.

— **Vérification** : $2 + 6 = 8$ et $5 - 2 = 3$. Cohérent.

— **Contrôle du caractère de Cramer** : $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = -2 - 15 = -17 \neq 0$ — le système a bien une unique solution.

Réponse. $(x, y) = (1, 2)$.

Correction de l'exercice 2 – Remontée d'un système triangulaire

a) Le système est **triangulaire supérieur** et ses coefficients diagonaux $1, 3, 2, 4$ sont **non nuls** : ce sont déjà quatre pivots. Le rang vaut 4, égal au nombre d'inconnues, et le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

système est carré : c'est un **système de Cramer**, il admet une unique solution.

b) On résout de la dernière équation vers la première, chaque inconnue n'étant calculée qu'à partir des suivantes :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j>i} a_{ij}x_j\right)$$

— $L_4 : t = \frac{12}{4} = 3$.
— $L_3 : 2z = 7 - 3t = -2$, donc $z = -1$.
— $L_2 : 3y = 1 - 2z + t = 1 + 2 + 3 = 6$, donc $y = 2$.
— $L_1 : x = 9 - 2y + z - t = 9 - 4 - 1 - 3 = 1$.
— **Vérification** dans $L_1 : 1 + 4 + 1 + 3 = 9$; dans $L_2 : 6 - 2 - 3 = 1$. Cohérent.

c) Le calcul de x_i demande $n - i$ multiplications (une par terme $a_{ij}x_j$, $j > i$) et une division. Au total :

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplications}, \qquad n \text{ divisions}$$

— La remontée coûte donc de l'ordre de $\frac{n^2}{2}$ opérations : c'est **négligeable** devant l'échelonnement lui-même (de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$), ce qui justifie la stratégie « échelonner puis remonter ».

Réponse. $(x, y, z, t) = (1, 2, -1, 3)$; remontée : $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications et n divisions.

Correction de l'exercice 3 – Pivot de Gauss 3x3

Échelonnement en gardant L_1 comme pivot.

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : -3y - z = -9$.
— $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 : y - 2z = -4$.
— $L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 : -7z = -21$, donc $z = 3$.

Remontée.

— De $y - 2z = -4 : y = -4 + 6 = 2$.
— De $x + y + z = 6 : x = 6 - 2 - 3 = 1$.
— **Solution** : $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.
— **Vérification dans les trois équations** : $1 + 2 + 3 = 6$; $2 - 2 + 3 = 3$; $1 + 4 - 3 = 2$. Cohérent.

Réponse. $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Correction de l'exercice 4 – Opérations simultanées interdites

a) $L_1 + L_2$ donne $2x = 2$, donc $x = 1$, puis $y = 2 - x = 1$: **solution unique** $(1, 1)$.

b) Avec les lignes d'origine, $L_1 - L_2$ donne $2y = 2$ et $L_2 - L_1$ donne $-2y = -2$. Le système de l'élève est

$$\begin{cases} 2y = 2 \\ -2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$$

— Son ensemble de solutions est la droite $\{(s, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}$: il contient celui du système initial mais il est **strictement plus gros**. Les systèmes ne sont pas équivalents, l'élève a **perdu une équation**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Les nouvelles lignes s'obtiennent en multipliant à gauche la matrice augmentée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

— P n'est **pas inversible** (ses lignes sont opposées, rg$P = 1$) : on ne peut pas revenir au système de départ. Une suite d'opérations conserve l'ensemble des solutions précisément lorsque la matrice de la transformation est inversible, ce que garantissent les trois opérations élémentaires **faites une à une**.

d) Dans l'algorithme de Gauss, on fait simultanément $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ pour tous les $i \geq 2$: c'est légitime car la **ligne pivot** L_1 **n'est pas modifiée**. La matrice de la transformation est alors triangulaire inférieure à diagonale de 1, donc inversible.

Réponse. Solution $(1, 1)$; les opérations simultanées donnent $y = 1$ seul (droite de solutions) : la transformation P n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 5 – Système incompatible

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $0 = 5 - 2 = 3$.
— On obtient une équation **impossible** : $0 = 3$.
— **Conclusion** : le système n'admet **aucune solution**, il est **incompatible**.
— **Interprétation géométrique** : les deux équations décrivent des droites de même vecteur directeur ($x + y$ constant) mais d'ordonnées à l'origine différentes — deux droites **strictement parallèles**.
— **Rang** : rg$(A) = 1$ alors que la matrice augmentée est de rang 2 — c'est exactement le critère d'incompatibilité.

Réponse. Aucune solution (droites parallèles).

Correction de l'exercice 6 – Système indéterminé

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $0 = 0$: la seconde équation est **redondante**.
— Il reste une seule équation : $x + y - z = 1$, donc rg$(A) = 1$ pour $n = 3$ inconnues.
— **Dimension des solutions** : $3 - 1 = 2$ — on choisit **deux** inconnues secondaires, par exemple $y = s$ et $z = t$.
— Alors $x = 1 - s + t$.
— **Solutions** : $(x, y, z) = (1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) + t(1, 0, 1)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.
— **Lecture** : c'est le **plan affine** d'équation $x + y - z = 1$, passant par $(1, 0, 0)$ et dirigé par deux vecteurs indépendants.
— **Vérification** avec $s = 2$, $t = 1$: $(0, 2, 1)$ et $0 + 2 - 1 = 1$. Cohérent.

Réponse. $(1 - s + t,\ s,\ t)$: un plan affine.

Correction de l'exercice 7 – Système homogène

— L_2 est le double de L_1 : on la supprime.
— Il reste $x + 2y + 3z = 0$ et $x = y$.
— En substituant $x = y$ dans la première : $3y + 3z = 0$, donc $z = -y$.
— **Solutions** : $(x, y, z) = (t, t, -t) = t(1, 1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.
— **Structure** : c'est une **droite vectorielle** de $\mathbb{R}^3$, de dimension $1 = 3 - \text{rg}(A)$ avec rg$(A) = 2$.
— **Vérification** avec $t = 1$: $1 + 2 - 3 = 0$ et $1 - 1 = 0$. Cohérent.
— **Rappel** : un système homogène n'est **jamais** incompatible — la solution nulle existe toujours.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $(t, t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8 – Système à paramètre

Déterminant : $\det = 1 - m^2 = (1-m)(1+m)$.

Cas 1 : $m \neq \pm 1$. Le système est de **Cramer**, solution unique.

— $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$: $(1-m^2)y = 1-m$, donc $y = \dfrac{1-m}{1-m^2} = \dfrac{1}{1+m}$.

— Puis $x = 1 - my = 1 - \dfrac{m}{1+m} = \dfrac{1}{1+m}$.

— **Solution** : $x = y = \dfrac{1}{1+m}$.

Cas 2 : $m = 1$. Les deux équations deviennent $x + y = 1$: une infinité de solutions, la droite $(t,\ 1-t)$.

Cas 3 : $m = -1$. Le système devient $x - y = 1$ et $-x + y = 1$, soit $x - y = 1$ et $x - y = -1$: **incompatible**.

— **Contrôle** avec $m = 2$: $x = y = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = 1$. Cohérent.

Réponse. $m \neq \pm 1$: $x = y = \dfrac{1}{1+m}$ · $m = 1$: droite · $m = -1$: aucune solution.

Correction de l'exercice 9 – Quatre inconnues

— **Addition de L_1 et L_2** : $2x + 2z = 4$, soit $x + z = 2$ — c'est exactement L_3, qui est donc **redondante**.

— **Soustraction** $L_1 - L_2$: $2y + 2t = 4$, soit $y + t = 2$.

— Le système équivaut donc à $\begin{cases} x + z = 2 \\ y + t = 2 \end{cases}$, de rang 2 pour 4 inconnues.

— **Dimension** : $4 - 2 = 2$ paramètres libres. On pose $z = s$ et $t = u$.

— **Solutions** : $(x, y, z, t) = (2 - s,\ 2 - u,\ s,\ u)$.

— **Vérification** avec $s = 1$, $u = 3$: $(1, -1, 1, 3)$. On contrôle : $1 - 1 + 1 + 3 = 4$ ✓ ; $1 + 1 + 1 - 3 = 0$ ✓ ; $2 + 2 = 4$ ✓.

— **Réflexe** : combiner les équations (somme, différence) avant de pivoter fait souvent apparaître la structure immédiatement.

Réponse. $(2 - s,\ 2 - u,\ s,\ u)$, $(s, u) \in \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 10 – Rang et compatibilité

Échelonnement.

— $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $y + 2z = 1$.

— $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $2y + 4z = a - 1$.

— $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$: $0 = a - 1 - 2 = a - 3$.

— **Compatibilité** : le système a des solutions **si et seulement si** $a = 3$.

Résolution pour $a = 3$.

— Il reste $x + y + z = 1$ et $y = 1 - 2z$; en substituant, $x = 1 - (1 - 2z) - z = z$.

— **Solutions** : $(x, y, z) = (t,\ 1 - 2t,\ t)$, $t \in \mathbb{R}$ — une droite affine.

— **Vérification** avec $t = 1$: $(1, -1, 1)$ donne $1 - 1 + 1 = 1$ ✓, $1 - 2 + 3 = 2$ ✓, $1 - 3 + 5 = 3 = a$ ✓.

Réponse. Solutions si et seulement si $a = 3$: $(t,\ 1 - 2t,\ t)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Compatibilité selon le second membre

a) On échelonne en **conservant les seconds membres littéraux** :

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $y + 3z = b - 2a$;
— $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $y + 3z = c - a$;
— $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $0 = (c - a) - (b - 2a) = a - b + c$.

La dernière ligne est une équation $0 = a - b + c$: le système est compatible si et seulement si

$$a - b + c = 0$$

b) Il reste deux pivots (x et y) pour trois inconnues : $z = t$ est **secondaire**.

— $y = b - 2a - 3t$;
— $x = a - 2y + z = a - 2(b - 2a - 3t) + t = 5a - 2b + 7t$.
— **Solutions** : $(x, y, z) = (5a - 2b,\ b - 2a,\ 0) + t(7, -3, 1)$, $t \in \mathbb{R}$: une **droite affine**.
— **Vérification** avec $(a, b, c) = (1, 2, 1)$ et $t = 1$: $(8, -3, 1)$ donne $8 - 6 - 1 = 1$, $16 - 15 + 1 = 2$, $8 - 9 + 2 = 1$. Cohérent.

c) Le système s’écrit $AX = B$: il est compatible si et seulement si B est une **combinaison linéaire des colonnes** de A. Ces combinaisons forment ici le **plan vectoriel** d’équation $a - b + c = 0$ de $\mathbb{R}^3$, car $\operatorname{rg} A = 2$. Un second membre « pris au hasard » rend donc le système incompatible.

Réponse. Compatible $\Leftrightarrow a - b + c = 0$; alors $(5a - 2b + 7t,\ b - 2a - 3t,\ t)$.

Correction de l’exercice 12 – Système surdéterminé

a) Les deux premières équations forment un système de Cramer : $L_1 + L_2$ donne $2x = 4$, donc $x = 2$ et $y = 1$. Le système complet est compatible si et seulement si ce couple vérifie la troisième :

$$2 \times 2 + 3 \times 1 = 7 = k$$

— Pour $k = 7$, la solution unique est $(2, 1)$; pour $k \neq 7$, il n’y en a **aucune**.
— **En termes de rang** : la matrice A (3×2) est de rang 2 ; la matrice augmentée est de rang 2 si $k = 7$, de rang 3 sinon.

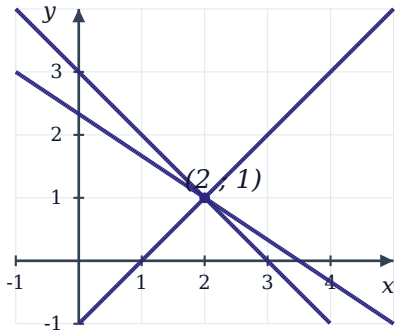
b) Chaque équation décrit une droite. Les deux premières se coupent en $(2, 1)$; la troisième, de vecteur directeur $(3, -2)$, passe par ce point si et seulement si $k = 7$: les trois droites sont **concourantes** exactement dans ce cas.

c) Non. Un tel système peut être incompatible (cas général), mais aussi avoir une unique solution ($k = 7$ ci-dessus), voire une infinité (par exemple si toutes les équations sont proportionnelles). Seule la comparaison des rangs de A et de la matrice augmentée

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

tranche.

Réponse. Solution si et seulement si $k = 7$: $(2, 1)$; les trois droites sont alors concourantes.



Les droites $x + y = 3$, $x - y = 1$ et $2x + 3y = 7$ (en couleur) concourent en (2 ; 1).

Correction de l'exercice 13 – Interprétation géométrique

Chaque équation est celle d'un **plan** de $\mathbb{R}^3$.

— Les vecteurs normaux $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 2)$ ne sont pas colinéaires : les plans ne sont pas parallèles, ils se coupent selon une **droite**.
— **Résolution** : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $-2y + z = -1$, soit $z = 2y - 1$.
— En reportant dans L_1 : $x = 1 - y - (2y - 1) = 2 - 3y$.
— **Paramétrage** avec $y = t$: $(x, y, z) = (2 - 3t,\ t,\ 2t - 1)$.
— **Point et vecteur directeur** : $(2, 0, -1) + t(-3, 1, 2)$.
— **Vérification** : $2 + 0 - 1 = 1$ ✓ et $2 - 0 - 2 = 0$ ✓. Le vecteur directeur est orthogonal aux deux normales : $(-3)(1) + 1 + 2 = 0$ ✓ et $-3 - 1 + 4 = 0$ ✓. Cohérent.

Réponse. Une droite : $(2, 0, -1) + t(-3, 1, 2)$.

Correction de l'exercice 14 – Application concrète

On note a, b, c les nombres d'unités produites. Chaque ressource donne une équation :

$$\begin{cases} 2a + b + c = 100 \\ a + 3b + c = 120 \\ a + b + 2c = 110 \end{cases}$$

Élimination par différences.

— $L_1 - L_2$: $a - 2b = -20$, donc $a = 2b - 20$.
— $L_1 - L_3$: $a - c = -10$, donc $c = a + 10 = 2b - 10$.
— On reporte dans L_1 :

$$2(2b - 20) + b + (2b - 10) = 7b - 50 = 100$$

— D'où $b = \dfrac{150}{7}$, puis $a = \dfrac{300 - 140}{7} = \dfrac{160}{7}$ et $c = \dfrac{300 - 70}{7} = \dfrac{230}{7}$.

Vérification dans les trois équations.

— Découpe : $\dfrac{320 + 150 + 230}{7} = \dfrac{700}{7} = 100$ ✓
— Assemblage : $\dfrac{160 + 450 + 230}{7} = \dfrac{840}{7} = 120$ ✓
— Finition : $\dfrac{160 + 150 + 460}{7} = \dfrac{770}{7} = 110$ ✓
— **Solution** : environ 22,9 unités de A, 21,4 de B et 32,9 de C.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Lecture pratique** : la solution mathématique n'est pas entière. En production réelle, on ajouterait la contrainte $a, b, c \in \mathbb{N}$, ce qui relève de la **programmation linéaire en nombres entiers** — le système exact n'a alors plus de solution et il faut relâcher une contrainte d'heures.

Réponse. $a = \frac{160}{7}$, $b = \frac{150}{7}$, $c = \frac{230}{7}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : discussion complète

Somme des trois équations : $(m+2)(x+y+z) = 3$.

Cas 1 : $m \neq 1$ et $m \neq -2$.

— La somme donne $x + y + z = \frac{3}{m+2}$.

— En soustrayant cette relation de la première équation : $(m-1)x = 1 - \frac{3}{m+2} = \frac{m-1}{m+2}$.

— Comme $m \neq 1$: $x = \frac{1}{m+2}$. Par symétrie du système, $y = z = \frac{1}{m+2}$.

— **Solution unique** : $x = y = z = \frac{1}{m+2}$.

Cas 2 : $m = 1$. Les trois équations se réduisent à $x + y + z = 1$.

— Ensemble des solutions : un **plan affine**, de dimension 2.

Cas 3 : $m = -2$. La somme donne $0 = 3$: le système est **incompatible**.

— **Contrôle** avec $m = 0$: la formule donne $x = y = z = \frac{1}{2}$, et le système $y + z = 1$, $x + z = 1$, $x + y = 1$ est bien vérifié. Cohérent.

— **Bilan** : le rang vaut 3 (cas 1), 1 (cas 2) ou 2 avec incompatibilité (cas 3) — les trois situations possibles d'un système carré.

Réponse. $m \neq 1, -2$: $x = y = z = \frac{1}{m+2}$ · $m = 1$: plan · $m = -2$: aucune solution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).