Plaquette 2 – Structure des solutions : écriture matricielle, noyau et solution particulière

Systèmes linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Structure de l'ensemble des solutions.

— Écriture matricielle : $AX = B$ avec $A \in M_{p,n}(\mathrm{K})$, et

$$AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_nC_n \qquad (C_j : \text{colonnes de } A)$$

— **Homogène** : $S_0 = \{X \mid AX = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de K^n, de dimension $n - r$ où $r = \mathrm{rg}A$; une base s'obtient en donnant successivement la valeur 1 à une inconnue secondaire et 0 aux autres.

— **Structure affine** : si X_0 est solution de $AX = B$,

$$S = X_0 + S_0 = \{X_0 + Y \mid AY = 0\}$$

— **Compatibilité** : $AX = B$ a une solution $\Leftrightarrow B \in \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_n) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A \mid B) = \mathrm{rg}A$.

— **Superposition** : si $AX_1 = B_1$ et $AX_2 = B_2$, alors $A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda B_1 + \mu B_2$.

— **Système carré** ($p = n$) : unicité $\Leftrightarrow S_0 = \{0\} \Leftrightarrow r = n \Leftrightarrow$ existence pour tout $B \Leftrightarrow A$ inversible.

— Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un système a 0, 1 ou une infinité de solutions ; sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il en a 0 ou 2^{n-r}.

Correction de l'exercice 1 – Écriture matricielle et combinaison de colonnes

a) Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $AX = B$. En lisant le produit colonne par colonne :

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $2 - 1 + 0 = 1$ et $1 + 1 - 0 = 2$: X_0 est solution. Cela signifie $C_1 + C_2 = B$: le second membre est la somme des deux premières colonnes.

c) $AX = 0$: $L_1 \leftrightarrow L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donnent

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 5z = 0 \end{cases}$$

— z est secondaire : $y = \dfrac{5z}{3}$, puis $x = -y + 2z = \dfrac{z}{3}$.

— Avec $z = 3s$: $S_0 = \{s(1, 5, 3) \mid s \in \mathbb{R}\}$, droite vectorielle de base $(1, 5, 3)$.

— Contrôle : $2 - 5 + 3 = 0$ et $1 + 5 - 6 = 0$. Et $\dim S_0 = 3 - 2 = 1$ car $\mathrm{rg}A = 2$ (deux lignes non proportionnelles).

d) Par la structure affine $S = X_0 + S_0$:

— $S = \{(1 + s,\ 1 + 5s,\ 3s) \mid s \in \mathbb{R}\}$, droite affine de $\mathbb{R}^3$ (intersection de deux plans non parallèles).

Réponse. $S_0 = \mathrm{Vect}(1, 5, 3)$; $S = \{(1 + s, 1 + 5s, 3s)\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Principe de superposition

a) AX_1 est la première colonne de A et AX_2 la deuxième : $B_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

b) On cherche à écrire le second membre comme combinaison de B_1 et B_2 : $\lambda B_1 + \mu B_2 = (\lambda+\mu,\ \mu,\ \lambda)$, d'où $\mu = 3$, $\lambda = 2$, et bien $\lambda + \mu = 5$. Par **linéarité** du produit matriciel :

$$A(2X_1 + 3X_2) = 2AX_1 + 3AX_2 = 2B_1 + 3B_2$$

— Donc $X = (2, 3, 0)$ est solution. Contrôle : $2 + 3 = 5$, $3 + 0 = 3$, $2 + 0 = 2$.

c) $AX = 0$ s'écrit $x + y = 0$, $y + z = 0$, $x + z = 0$. Les deux premières donnent $x = -y$ et $z = -y$; la troisième devient $-2y = 0$, donc $y = 0$, puis $x = z = 0$.

— $S_0 = \{0\}$: comme $S = X_0 + S_0$, la solution $(2, 3, 0)$ est **l'unique** solution. (A est inversible.)

d) L'excitation $\lambda X_1 + \mu X_2$ produit la réponse $\lambda B_1 + \mu B_2$: c'est le **principe de superposition** des physiciens (circuits linéaires, petites déformations élastiques). Il ne vaut que pour un modèle **linéaire** ; il tombe en défaut dès qu'un terme non linéaire (saturation, frottement sec) intervient.

Réponse. $B_1 = (1, 0, 1)$, $B_2 = (1, 1, 0)$; $X = 2X_1 + 3X_2 = (2, 3, 0)$, unique car $S_0 = \{0\}$.

Correction de l'exercice 3 – Solution évidente et solutions homogènes

a) Pour $X = (1, 1, 1, 1)$, chaque membre de gauche vaut la **somme des coefficients** de la ligne : $1 + 2 - 1 + 1 = 3$, $2 + 1 + 1 - 1 = 3$, $1 - 1 + 2 - 2 = 0$. Ce sont exactement les seconds membres : $X_0 = (1, 1, 1, 1)$ est solution.

b) $L_2 - L_1$ a pour coefficients $(1, -1, 2, -2)$ et pour second membre $3 - 3 = 0$: c'est L_3. Le système se réduit à L_1 et L_2, de rang 2.

c) Système homogène : $x + 2y - z + t = 0$ et $2x + y + z - t = 0$.

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $-3y + 3z - 3t = 0$, soit $y = z - t$.
— Puis $x = -2y + z - t = -z + t$.
— Inconnues secondaires z et t : $(z, t) = (1, 0)$ donne $V_1 = (-1, 1, 1, 0)$; $(z, t) = (0, 1)$ donne $V_2 = (1, -1, 0, 1)$.

$$S_0 = \mathrm{Vect}(V_1, V_2), \qquad \dim S_0 = 4 - 2 = 2$$

— Contrôle de V_1 dans les trois équations : $-1 + 2 - 1 = 0$, $-2 + 1 + 1 = 0$, $-1 - 1 + 2 = 0$.

d) $S = \{(1 - z + t,\ 1 + z - t,\ 1 + z,\ 1 + t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$, en écrivant $X_0 + zV_1 + tV_2$. C'est un **plan affine** de $\mathbb{R}^4$, de dimension 2.

— **Remarque** : on peut aussi prendre la solution particulière $(1, 1, 0, 0)$ que fournit le pivot ; l'ensemble S est le même, seul son paramétrage change.

Réponse. $X_0 = (1, 1, 1, 1)$; $S_0 = \mathrm{Vect}((-1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$; $S = X_0 + S_0$, plan affine.

Correction de l'exercice 4 – Zéro, une ou une infinité de solutions

a) Par linéarité : $A(X_2 - X_1) = AX_2 - AX_1 = B - B = 0$.

b) Pour tout t, en utilisant a) :

$$A(X_1 + t(X_2 - X_1)) = AX_1 + tA(X_2 - X_1) = B + 0 = B$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— L'application $t \mapsto X_1 + t(X_2 - X_1)$ est **injective** car $X_2 - X_1 \neq 0$: deux valeurs distinctes de t donnent deux solutions distinctes. Comme $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont infinis, on obtient une infinité de solutions (toute la droite affine passant par X_1 et X_2).

c) Soit aucune solution (système incompatible), soit exactement une, soit une infinité. **Jamais exactement deux**, ni trois.

d) Sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $y = 1 - x = 1 + x$: les solutions sont $(0, 1)$ et $(1, 0)$, **exactement deux**.

— La preuve de b) reste juste, mais le corps n'a que **deux** éléments : t ne prend que les valeurs 0 et 1, qui redonnent X_1 et X_2. En général sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, S_0 est de dimension $n - r$ donc de cardinal 2^{n-r}, et un système compatible a exactement 2^{n-r} solutions (ici $2^{2-1} = 2$).

Réponse. 0, 1 ou une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $x + y = 1$ en a exactement 2.

Correction de l'exercice 5 – Plus d'inconnues que d'équations

a) L'algorithme de Gauss transforme le système en un système échelonné **équivalent**. Chaque pivot occupe une ligne distincte, donc il y a au plus p pivots, et au moins

$$n - p \geq 1 \text{ inconnue secondaire}$$

— On donne la valeur 1 à une inconnue secondaire, 0 aux autres, puis on remonte : on obtient une solution, non nulle puisqu'une de ses composantes vaut 1.

b) Chercher (a, b, c, d) tel que $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0$, c'est résoudre un système homogène de 3 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

— Par a), il a une solution non nulle : les vecteurs sont liés.
— $L_1 - L_2$: $a = b$. Puis L_3 : $2a + d = 0$, donc $d = -2a$, et L_1 : $c = -a - d = a$.
— Avec $a = 1$: $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, -2)$, soit $u_1 + u_2 + u_3 = 2u_4$.
— Contrôle : $u_1 + u_2 + u_3 = (2, 2, 2) = 2u_4$.

c) Non : $x + y = 0$ et $x + y = 1$ (2 équations, 3 inconnues si l'on ajoute z) forment un système **incompatible**. Ce qui reste vrai : **s'il** est compatible, il a une infinité de solutions (au moins $n - p$ paramètres libres).

Réponse. Au moins $n - p$ inconnues secondaires ; $u_1 + u_2 + u_3 - 2u_4 = 0$; faux pour un système non homogène (il peut être incompatible).

Correction de l'exercice 6 – Base des solutions d'un système homogène

a) $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0$, c'est $2L_2$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $0 = 0$. Il reste

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

— Deux pivots (x_1 et x_2) : le rang vaut 2.

b) Les inconnues secondaires sont x_3, x_4, x_5. On remonte :

— $x_2 = -x_3 + x_4 - 2x_5$;
— $x_1 = -2x_2 - x_4 + x_5 = 2x_3 - 3x_4 + 5x_5$.

On donne tour à tour la valeur 1 à une inconnue secondaire, 0 aux deux autres :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $x_3 = 1$: $V_1 = (2, -1, 1, 0, 0)$;
— $x_4 = 1$: $V_2 = (-3, 1, 0, 1, 0)$;
— $x_5 = 1$: $V_3 = (5, -2, 0, 0, 1)$.

La famille (V_1, V_2, V_3) engendre S_0 (toute solution vaut $x_3V_1 + x_4V_2 + x_5V_3$) et elle est libre (regarder les trois dernières coordonnées) : c'est une base, et $\dim S_0 = 3$.

— Contrôle de V_3 : $5 - 4 + 0 - 1 = 0$ et $-2 + 0 - 0 + 2 = 0$.

c) La formule du rang pour les systèmes donne

$$\dim S_0 = n - \mathrm{rg}A = 5 - 2 = 3$$

— en accord avec b).

Réponse. Rang 2 ; base $(2, -1, 1, 0, 0)$, $(-3, 1, 0, 1, 0)$, $(5, -2, 0, 0, 1)$; $\dim S_0 = 3$.

Correction de l'exercice 7 – Deux systèmes équivalents

a) (S_1) : $x = y$ puis $z = -2x$: $S_1 = \mathrm{Vect}(1, 1, -2)$.

— (S_2) : $z = -2x$ et $z = -2y$ donnent $x = y$: $S_2 = \mathrm{Vect}(1, 1, -2)$. Les deux systèmes ont les **mêmes solutions**.

b) On cherche α, β tels que $\alpha(x + y + z) + \beta(x - y) = (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y + \alpha z$:

— pour $2x + z$: $\alpha = 1$, $\alpha + \beta = 2$, $\alpha - \beta = 0$, soit $\beta = 1$: $2x + z = L_1 + L_2$;
— pour $2y + z$: $\alpha = 1$, $\alpha + \beta = 0$, $\alpha - \beta = 2$, soit $\beta = -1$: $2y + z = L_1 - L_2$.

Réciproquement, en notant $M_1 = L_1 + L_2$ et $M_2 = L_1 - L_2$:

$$L_1 = \frac{M_1 + M_2}{2}, \qquad L_2 = \frac{M_1 - M_2}{2}$$

c) Si chaque équation de (S_2) est combinaison de celles de (S_1), toute solution de (S_1) annule ces combinaisons, donc $S_1 \subset S_2$. Si de plus la réciproque vaut, $S_2 \subset S_1$, d'où l'égalité. C'est exactement pourquoi les **opérations élémentaires**, inversibles, conservent l'ensemble des solutions.

Réponse. Même ensemble $\mathrm{Vect}(1, 1, -2)$; $2x + z = L_1 + L_2$, $2y + z = L_1 - L_2$ et réciproquement.

Correction de l'exercice 8 – Système à coefficients complexes

a) Le déterminant $1 \times 1 - i \times i = 2$ est non nul : système de Cramer.

— De L_1 : $x = 1 + i - iy$. On reporte dans L_2 : $i(1 + i) + y + y = 2i$, soit $2y = 2i - i + 1 = 1 + i$, donc $y = \dfrac{1 + i}{2}$.
— Puis $x = 1 + i - \dfrac{i(1 + i)}{2} = 1 + i - \dfrac{i - 1}{2} = \dfrac{3 + i}{2}$.
— Contrôle de L_2 : $\dfrac{i(3 + i) + 1 + i}{2} = \dfrac{3i - 1 + 1 + i}{2} = 2i$.

b) Comme A et B sont réelles, on sépare parties réelle et imaginaire dans

$$A(U + iV) = AU + iAV = B$$

— AU et AV sont réels : l'identification donne $AU = B$ et $AV = 0$.

c) $(1 + i) + (1 + i) + (-1 - 2i) = 1$ et $(1 + i) - (1 + i) = 0$: c'est une solution.

— Partie réelle $U = (1, 1, -1)$: $1 + 1 - 1 = 1$ et $1 - 1 = 0$, solution réelle.
— Partie imaginaire $V = (1, 1, -2)$: $1 + 1 - 2 = 0$ et $1 - 1 = 0$, solution homogène.
— **Conséquence** : un système réel qui a une solution complexe a une solution réelle ; résoudre dans $\mathbb{C}$ ne crée pas de solutions « nouvelles » pour la compatibilité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $x = \dfrac{3+i}{2}$, $y = \dfrac{1+i}{2}$; $U = (1, 1, -1)$ solution réelle, $V = (1, 1, -2)$ solution homogène.

Correction de l'exercice 9 – Le jeu des lampes

a) La lampe j change d'état autant de fois qu'on appuie sur elle ou sur une voisine. Allumée à la fin signifie un nombre impair de changements :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

— $L_2 - L_1 : x_3 = 1 - 1 = 0$; $L_3 : x_2 = 1$; $L_1 : x_1 = 0$. On appuie **seulement au milieu**, ce qui change les trois lampes.

b) Équations $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_2 + x_3 + x_4 = 1$, $x_3 + x_4 = 1$.

— $L_2 - L_1 : x_3 = 0$; $L_4 : x_4 = 1$; $L_3 : x_2 = 1 - 0 - 1 = 0$; $L_1 : x_1 = 1$. On appuie sur les lampes 1 et 4.

c) Avec K : lampe 1 : $1 + 1 = 0$; lampe 2 : $1 + 1 + 0 = 0$; lampe 3 : $1 + 0 + 1 = 0$; lampes 4 et 5 par symétrie. K est solution homogène : appuyer sur $1, 2, 4, 5$ **ne change rien**. La matrice M n'est pas inversible.

d) Si $MX = B$, alors, M étant symétrique :

$$K^{\mathsf{T}}B = K^{\mathsf{T}}MX = (MK)^{\mathsf{T}}X = 0$$

— Pour $B = (1, 0, 0, 0, 0)$, $K^{\mathsf{T}}B = 1 \neq 0$: contradiction, cette configuration est **inaccessible**.

e) $B = (1, 1, 1, 1, 1)$ vérifie $K^{\mathsf{T}}B = 4 = 0$. On essaie $X_0 = (1, 0, 0, 1, 0)$: les sommes par lampe valent $1, 1, 1, 1, 1$. Le rang de M vaut 4 (le pivot donne 4 pivots), donc $S_0 = \{0, K\}$ et il y a $2^{5-4} = 2$ solutions :

— $X_0 = (1, 0, 0, 1, 0)$ et $X_0 + K = (0, 1, 0, 0, 1)$: appuyer sur 1 et 4, ou sur 2 et 5.

Réponse. 3 lampes : appuyer sur la 2 ; 4 lampes : sur 1 et 4 ; 5 lampes : K ne change rien, « lampe 1 seule » inaccessible, deux solutions $\{1, 4\}$ et $\{2, 5\}$.

Correction de l'exercice 10 – Retrouver un système à partir de ses solutions

a) Une équation $ax + by + cz = d$ est vérifiée sur toute la droite si et seulement si elle l'est au point $(1, 2, 0)$ **et** si la forme $ax + by + cz$ s'annule sur la direction $w = (1, -1, 2)$:

$$a - b + 2c = 0$$

— Deux solutions indépendantes : $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ et $(0, 2, 1)$.

— Seconds membres au point $(1, 2, 0)$: $1 + 2 = 3$ et $4 + 0 = 4$.

— Système : $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$. Contrôle avec $t = 1$, point $(2, 1, 2)$: $2 + 1 = 3$ et $2 + 2 = 4$.

b) On cherche les formes (a, b, c, d) nulles sur u et v :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$$

— Système de rang 2 à 4 inconnues : 2 solutions indépendantes, par exemple $(1, 0, -1, 1)$ et $(0, 1, 0, -1)$.

— D'où le système $x_1 - x_3 + x_4 = 0$, $x_2 - x_4 = 0$. Contrôle : u donne $1 - 1 + 0 = 0$ et $0 - 0 = 0$; v donne $0 - 1 + 1 = 0$ et $1 - 1 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Ses solutions forment un espace de dimension $4-2=2$ qui contient u et v, libres : c'est exactement $\mathrm{Vect}(u,v)$.

c) Un système de r équations indépendantes a des solutions de dimension $n-r$. Pour une droite de $\mathbb{R}^3$, il faut $3-r=1$, donc 2 **équations** ; pour un plan de $\mathbb{R}^4$, $4-r=2$, donc 2 **équations**. Une seule ne suffit jamais (elle décrit un hyperplan).

Réponse. a) $x+y=3$, $2y+z=4$; b) $x_1-x_3+x_4=0$, $x_2-x_4=0$; deux équations au minimum dans les deux cas.

Correction de l'exercice 11 – Existence pour tout second membre, unicité

a) Deux solutions diffèrent d'une solution homogène, et $\dim S_0 = n-r$. L'unicité (quand il y a une solution) équivaut à $S_0=\{0\}$, c'est-à-dire

$$n-r=0 \Leftrightarrow r=n$$

b) Après échelonnement (opérations inversibles, codées par une matrice P inversible), le système devient $UX=PB$ avec U échelonnée à r lignes non nulles. Si $r<p$, la dernière ligne de U est nulle ; en choisissant $B=P^{-1}E_p$ (où E_p est le dernier vecteur de base), la dernière équation devient $0=1$: pas de solution. Si $r=p$, chaque ligne a un pivot, aucune équation « $0=c$ » n'apparaît, et la remontée fournit toujours une solution.

c) Pour $p=n$: existence pour tout $B \Leftrightarrow r=p=n \Leftrightarrow$ unicité. C'est le caractère **de Cramer**, équivalent à l'inversibilité de A.

d) Pour $A\in M_{3,5}$, $r\le 3<5$: l'unicité est **impossible** (au moins 2 paramètres libres dès qu'il y a une solution). L'existence pour tout B a lieu si et seulement si $r=3$, ce qui arrive (par exemple si les trois premières colonnes forment I_3).

Réponse. Unicité $\Leftrightarrow r=n$; existence pour tout $B \Leftrightarrow r=p$; en carré les deux coïncident ; en 3×5, unicité impossible, existence si $r=3$.

Correction de l'exercice 12 – Résoudre deux systèmes d'un coup

a) On applique les **mêmes** opérations aux deux seconds membres (colonnes de droite) :

— $L_2\leftarrow L_2-L_1$, $L_3\leftarrow L_3-L_1$: $(0,1,3\mid -1,11)$ et $(0,2,8\mid -1,28)$;

— $L_3\leftarrow L_3-2L_2$: $(0,0,2\mid 1,6)$.

Remontée pour B_1 : $c=\frac{1}{2}$, $b=-1-3c=-\frac{5}{2}$, $a=1-b-c=3$.

Remontée pour B_2 : $c=3$, $b=11-9=2$, $a=6-2-3=1$.

b) La ligne i de AX vaut $a+bx_i+cx_i^2=P(x_i)$ avec $x_i=i$. Le système dit

$$P(1)=\beta_1,\qquad P(2)=\beta_2,\qquad P(3)=\beta_3$$

— La solution pour B_2 est $P=1+2X+3X^2$: contrôle $P(1)=6$, $P(2)=17$, $P(3)=34$.

c) Pour B_1, on veut $P(1)=1$ et $P(2)=P(3)=0$: P s'annule en 2 et 3, donc $P=\lambda(X-2)(X-3)$, et $P(1)=2\lambda=1$:

$$P=\frac{(X-2)(X-3)}{2}=3-\frac{5}{2}X+\frac{1}{2}X^2$$

— On retrouve $(3,-\frac{5}{2},\frac{1}{2})$: c'est la **première colonne de** A^{-1} et un polynôme de Lagrange.

Réponse. $AX=B_1$: $\left(3,-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$; $AX=B_2$: $(1,2,3)$; $AX=B$ traduit $P(i)=\beta_i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Conditions de compatibilité par la transposée

a) Si $AX = B$: $Y^{\mathsf{T}}B = Y^{\mathsf{T}}AX = (A^{\mathsf{T}}Y)^{\mathsf{T}}X = 0$.

b) $L_3 = L_1 + L_2$, et L_1, L_2 ne sont pas proportionnelles : $\operatorname{rg} A = 2$.

— $A^{\mathsf{T}}Y = 0$ s'écrit $y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$, $y_1 + y_3 = 0$, $y_2 + y_3 = 0$, $2y_1 + y_2 + 3y_3 = 0$.
— Les deux équations centrales donnent $y_1 = y_2 = -y_3$, qui vérifie les deux autres ($-2y_3 + 2y_3 = 0$ et $-3y_3 + 3y_3 = 0$) : solutions $\operatorname{Vect}(1, 1, -1)$.

c) Avec $Y = (1, 1, -1)$, a) donne la condition nécessaire

$$b_1 + b_2 - b_3 = 0$$

— **Suffisance** : en échelonnant $(A \mid B)$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$ produit la ligne $0 = b_3 - b_1 - b_2$; si elle est nulle, il reste un système échelonné de rang 2 sans ligne contradictoire, donc compatible.

d) $\dim\{AX = 0\} = 4 - 2 = 2$ et $\dim\{A^{\mathsf{T}}Y = 0\} = 3 - 2 = 1$: les deux font intervenir **le même rang** $r = 2$ (le rang d'une matrice est celui de sa transposée). Le nombre de conditions de compatibilité est $p - r$.

Réponse. $\operatorname{rg} A = 2$; $\ker A^{\mathsf{T}} = \operatorname{Vect}(1, 1, -1)$; compatible $\Leftrightarrow b_1 + b_2 - b_3 = 0$; dimensions 2 et 1.

Correction de l'exercice 14 – Lire les solutions sur la forme échelonnée réduite

a) Matrice augmentée et opérations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $(0, 0, 1, 2 \mid 2)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(0, 0, 1, 2 \mid 2)$;
— $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: ligne nulle.
— Au-dessus du pivot de x_3, le coefficient de L_1 est déjà nul : la forme réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Pivots en colonnes 1 et 3 : x_1, x_3 principales ; $x_2 = s$ et $x_4 = t$ secondaires. Chaque ligne donne directement une inconnue principale :

— $x_1 = 1 - 2s - 3t$ et $x_3 = 2 - 2t$.
— $S = \{(1 - 2s - 3t,\ s,\ 2 - 2t,\ t)\}$, plan affine de $\mathbb{R}^4$.
— Contrôle avec $s = t = 1$: $(-4, 1, 0, 1)$ donne $-4 + 2 + 3 = 1$, $-8 + 4 + 8 = 4$, $-4 + 2 + 5 = 3$.

c) Après l'élimination de x_1, la colonne de x_2 est **entièrement nulle** sous la première ligne, car $C_2 = 2C_1$: aucun pivot ne peut y être choisi, et l'algorithme passe à la colonne suivante. Une colonne sans pivot est toujours combinaison des colonnes pivots précédentes.

Réponse. Forme réduite : $x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1$, $x_3 + 2x_4 = 2$; $S = \{(1 - 2s - 3t, s, 2 - 2t, t)\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : polynômes soumis à des conditions linéaires

a) $P(1) = a+b+c+d$ et $P(-1) = a-b+c-d$. Pour l’intégrale, seules les puissances **paires** de $xP(x)$ contribuent sur $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} (ax + bx^2 + cx^3 + dx^4)\,\mathrm{d}x = \frac{2b}{3} + \frac{2d}{5}$$

— Enfin $P'(0) = b$. Le système est

$$\begin{cases} 2a + 2c = 2 \\ 2b + 2d = 2k \\ \dfrac{2b}{3} + \dfrac{2d}{5} = m \\ b = 1 \end{cases}$$

b) Homogène : $a+c=0$, $b+d=0$, $\frac{2b}{3}+\frac{2d}{5}=0$, $b=0$. D’où $b=d=0$ et $c=-a$:

— $S_0 = \mathrm{Vect}(X^2-1)$, de dimension 1 : le rang du système vaut $4-1=3$.

c) Les trois équations en (b,d) forment un système **surdéterminé** : $b=1$, puis $d=k-1$, et la troisième impose

$$m = \frac{2}{3} + \frac{2(k-1)}{5} = \frac{6k+4}{15}$$

— L’équation en (a,c), $a+c=1$, est toujours compatible.

d) Si $m = \frac{6k+4}{15}$, une solution particulière est $a=1$, $c=0$: $P_0 = 1 + X + (k-1)X^3$. Par la structure affine :

$$S = \left\{ 1 + X + (k-1)X^3 + \lambda(X^2-1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

— Contrôle avec $k=1$, $m=\frac{2}{3}$, $\lambda=0$: $P = 1+X$, $P(1)+P(-1)=2$, $P(1)-P(-1)=2$, $\int_{-1}^{1}(x+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$, $P'(0)=1$.

— Si $m \neq \frac{6k+4}{15}$, aucun polynôme ne convient.

Réponse. Compatible $\Leftrightarrow m = \frac{6k+4}{15}$; alors $P = 1 + X + (k-1)X^3 + \lambda(X^2-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).