Plaquette 3 – Discussion de systèmes à paramètres

Systèmes linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Un paramètre transforme un système en une **famille** de systèmes. On échelonne en gardant le paramètre, et à chaque division on se demande : **ce pivot peut-il s'annuler ?** Les valeurs qui l'annulent (valeurs critiques) sont traitées à part, en reprenant le système avec la valeur numérique. On conclut par un bilan cas par cas (unique, infinité, aucune), qu'on contrôle sur une valeur particulière. Le corps de base ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) fait partie des données : il change les valeurs critiques.

Exercice 1 – Un facteur qui se simplifie

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère

$$\begin{cases} (m-1)x + 2y = 2 \\ 3x + (m-2)y = 2m - 1 \end{cases}$$

a) Calculer $D(m) = (m-1)(m-2) - 6$ et le factoriser.

b) Résoudre le système lorsque $D(m) \neq 0$; simplifier les expressions obtenues.

c) Traiter les valeurs critiques.

d) Que devient la solution quand m tend vers 4 ? Interpréter géométriquement.

Exercice 2 – Diviser par une expression qui peut s'annuler

Un élève résout, pour m réel, le système $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m \end{cases}$ ainsi :

« De L_2, $x = m - my$. Dans L_1 : $m^2 - m^2 y + y = 1$, donc $(1 - m^2)y = 1 - m^2$, donc $y = 1$ et $x = 0$. L'unique solution est $(0, 1)$ pour tout m. »

a) Vérifier que $(0, 1)$ est toujours solution.

b) Localiser l'erreur de raisonnement.

c) Donner la discussion complète.

Exercice 3 – Système non carré à paramètre

Discuter selon $m \in \mathbb{R}$ le système de trois équations à deux inconnues

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + my = m \\ mx + y = m^2 \end{cases}$$

a) Traiter le cas $m = 1$.

b) Pour $m \neq 1$, résoudre les deux premières équations, puis écrire la condition imposée par la troisième.

c) Faire le bilan, et vérifier la solution trouvée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Infinité de solutions : conditions sur deux paramètres

Soient a, b réels. On considère

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 5y + az = 9 \\ x + 3y + 4z = b \end{cases}$$

a) Échelonner le système.

b) Déterminer les couples (a, b) pour lesquels le système a une unique solution, une infinité, aucune.

c) Résoudre dans le cas d'une infinité de solutions.

Exercice 5 – Trois plans qui ne se coupent jamais en un point

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère les plans de $\mathbb{R}^3$

$$P_1 : x + y + z = 1, \qquad P_2 : x - y + z = 1, \qquad P_3^{(m)} : mx + y + mz = 2$$

a) Déterminer la droite $D = P_1 \cap P_2$.

b) Écrire le vecteur normal $(m, 1, m)$ de P_3 comme combinaison de $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 1)$. Que peut-on dire du rang du système formé par les trois équations ?

c) Discuter selon m l'intersection des trois plans et décrire la configuration géométrique dans chaque cas.

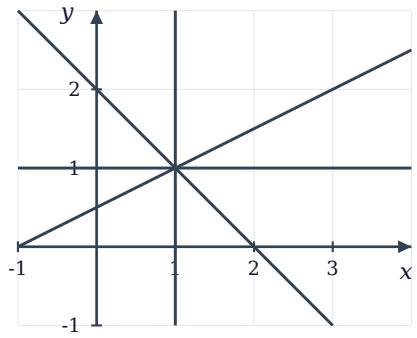
Exercice 6 – Famille de droites et point fixe

Pour $m \in \mathbb{R}$, on note D_m la droite d'équation $(1 - m)x + (1 + m)y = 2$.

a) Montrer que toutes les droites D_m passent par un même point Ω (écrire l'équation comme un polynôme en m).

b) Résoudre, pour $m \neq m'$, le système formé par les équations de D_m et $D_{m'}$.

c) Toute droite passant par Ω est-elle une droite D_m ?



Les droites D_0, D_1, D_{-1} et D_3.

Exercice 7 – Système cyclique à paramètre

Soient a, b, c, d, λ réels et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + t = c \\ t + \lambda x = d \end{cases}$$

a) Exprimer y, z, t en fonction de x à l'aide des trois premières équations.

b) En déduire une équation en x seul, et discuter selon λ.

c) Pour $\lambda = 1$, interpréter la condition obtenue et décrire les solutions.

d) Et pour $\lambda = -1$?

Exercice 8 – Système de taille n : I plus lambda J

Soient $n \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et le système de n équations

$$x_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j = b_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

a) En sommant les équations, obtenir une équation portant sur $S = \sum_j x_j$.

b) Résoudre le système lorsque $\lambda \neq -\frac{1}{n}$.

c) Traiter le cas $\lambda = -\frac{1}{n}$.

d) Application : $n = 3$, $\lambda = 1$, $(b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 3)$.

Exercice 9 – Réel ou complexe : le paramètre compte

Pour $m \in \mathrm{K}$, on considère le système homogène

$$\begin{cases} x + my = 0 \\ y + mz = 0 \\ mx + z = 0 \end{cases}$$

a) Exprimer x et y en fonction de z grâce aux deux premières équations, et en déduire une condition sur m pour qu'il existe une solution non nulle.

b) Résoudre cette condition dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$.

c) Pour chaque valeur critique complexe, donner les solutions.

Exercice 10 – Selon le corps de base

Soit p un nombre premier. On considère, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, le système homogène $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ et le système $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$.

a) Montrer que le système homogène n'a que la solution nulle, sauf pour une valeur de p à déterminer. Donner alors toutes ses solutions.

b) Résoudre le second système dans $\mathbb{Q}$.

c) Le résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et comparer avec b). Que se passe-t-il dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

Exercice 11 – Les valeurs de lambda qui font chuter le rang

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche les réels λ pour lesquels le système $AX = \lambda X$ admet

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

une solution $X \neq 0$.

a) Écrire ce système sous forme homogène, en posant $\mu = 2 - \lambda$.

b) En utilisant la première et la dernière équation, montrer que si $\mu \neq 0$ une solution vérifie $x = z$, puis trouver la condition sur μ.

c) Traiter $\mu = 0$. Conclure en donnant les valeurs de λ et les solutions associées.

Exercice 12 – Second membre paramétré : Fourier à trois points

Soit $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On considère

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases}$$

a) Rappeler pourquoi $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.

b) En sommant les trois équations, trouver x. En sommant après avoir multiplié L_2 par j^2 et L_3 par j, trouver y. Trouver de même z.

c) Vérifier le résultat pour $(a, b, c) = (3, 0, 0)$, et en déduire que la matrice du système est inversible.

Exercice 13 – Paramètres a, b, c : un système de Vandermonde

Soient a, b, c, d réels. On considère

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = d^2 \end{cases}$$

a) On suppose a, b, c **distincts**. Montrer que $x = \dfrac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}$ et les formules analogues pour y et z donnent une solution. (Considérer le polynôme $L = x\dfrac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \ldots$, ou vérifier que $\sum x\,Q(a) = Q(d)$ pour $Q = 1, X, X^2$.)

b) Pourquoi est-ce l'unique solution ?

c) On suppose $a = b \neq c$. Discuter selon d.

d) Contrôle numérique : $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice 14 – Coefficients indéterminés pour une équation différentielle

Soient a, b réels. On cherche une solution polynomiale de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = x^2$.

a) On cherche $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Écrire le système vérifié par (α, β, γ) et le résoudre lorsque $b \neq 0$.

b) Que se passe-t-il si $b = 0$?

c) Lorsque $b = 0$ et $a \neq 0$, chercher une solution $y = \delta x^3 + \alpha x^2 + \beta x$.

d) Contrôle : $a = 1$, $b = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : un alliage sur mesure

Une fonderie dispose de trois alliages (proportions en masse) :

Alliage	Cuivre	Zinc	Étain
A	60 %	40 %	0 %
B	20 %	60 %	20 %
C	50 %	10 %	40 %

Elle doit livrer 100 kg d'un alliage contenant 40 kg de cuivre, p kg d'étain et $60 - p$ kg de zinc, où p est un paramètre. On note a, b, c les masses (en kg) d'alliages A, B, C utilisées.

a) Écrire le système vérifié par (a, b, c). Pourquoi la contrainte « $a + b + c = 100$ » est-elle automatiquement satisfaite ?

b) Résoudre le système en fonction de p.

c) Pour quelles valeurs de p la commande est-elle réalisable ?

d) Donner les masses pour $p = 24$ et les vérifier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).