# Plaquette 5 – Modéliser par un système linéaire : géométrie, physique, économie

## Systèmes linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

**Méthode**

Modéliser, c'est traduire chaque contrainte de la situation en **une équation linéaire** : un point par lequel passe une courbe, une loi de conservation (charge, masse, débit, atomes), un équilibre (forces, moments), un bilan comptable. On compte ensuite **inconnues et équations indépendantes** : le rang dit d'emblée si l'on attend une solution unique, une famille à paramètres ou aucune solution. Enfin, on **interprète** : positivité des quantités physiques, unicité à un facteur près, degrés de liberté qui manquent (système hyperstatique) ou qui restent (réseau de débits).

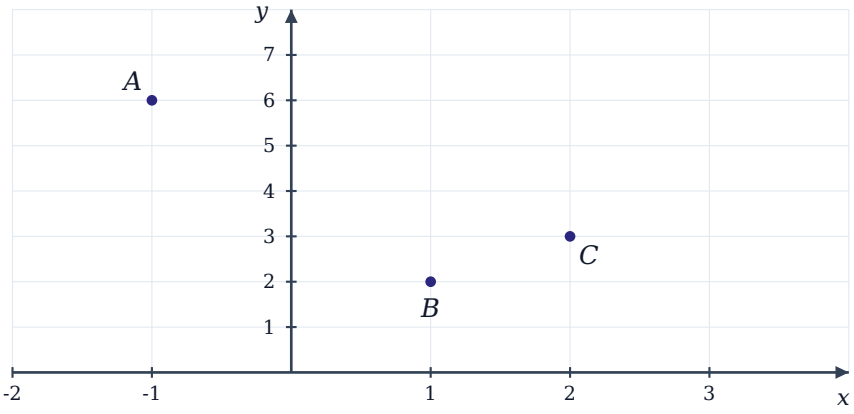
### Exercice 1 – La parabole passant par trois points

On cherche une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la courbe passe par $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ et $C(2, 3)$.

a) Écrire le système vérifié par $(a, b, c)$ et le résoudre.

b) Montrer que, plus généralement, pour trois abscisses distinctes $x_1, x_2, x_3$ et des ordonnées quelconques, le système est de Cramer.

c) Que se passe-t-il si l'on impose en plus le passage par $D(3, 5)$ ? Par $D'(3, 6)$ ?




*Les trois points imposés.*

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 2 – Le cercle passant par trois points

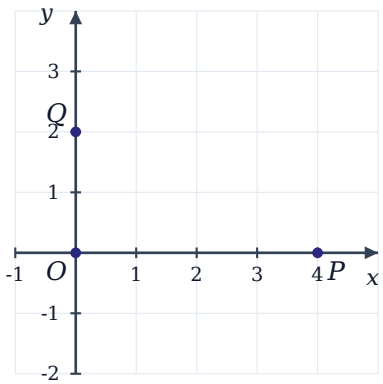
Dans un repère orthonormé, on cherche un cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

a) Montrer qu'une telle équation définit un cercle, un point ou l'ensemble vide, selon le signe de $a^2 + b^2 - 4c$.

b) Déterminer le cercle passant par $O(0,0)$, $P(4,0)$ et $Q(0,2)$ : centre et rayon.

c) Montrer que le système obtenu pour $O(0,0)$, $R(1,1)$ et $S(2,2)$ est incompatible, et l'interpréter.

d) Montrer que trois points non alignés déterminent toujours un unique cercle (on pourra raisonner avec les médiatrices).




*Les trois points de la question b).*

## Exercice 3 – Lois de Kirchhoff dans un circuit à deux mailles

Un circuit comporte trois branches reliées entre deux nœuds $N$ et $N'$ :

— branche 1 : un générateur idéal de f.é.m. $E_1 = 10$ V en série avec $R_1 = 1\ \Omega$, parcourue par $I_1$ de $N'$ vers $N$ ;

— branche 2 : un générateur de f.é.m. $E_2 = 8$ V en série avec $R_2 = 2\ \Omega$, parcourue par $I_2$ de $N'$ vers $N$ ;

— branche 3 : une résistance $R_3 = 2\ \Omega$, parcourue par $I_3$ de $N$ vers $N'$.

a) Écrire la loi des nœuds en $N$ et la loi des mailles pour les deux mailles formées des branches 1-3 et 2-3.

b) Résoudre le système obtenu.

c) Vérifier le bilan de puissance : puissance fournie par les générateurs = puissance dissipée par effet Joule.

d) Pour quelle valeur de $E_2$ le courant $I_2$ est-il nul ?

## Exercice 4 – Le modèle entrée-sortie de Leontief

Une économie comporte deux secteurs, l'agriculture et l'industrie. Pour produire 1 € de biens agricoles, l'agriculture consomme 0,2 € de ses propres produits et 0,4 € de produits industriels ; pour produire 1 € de biens industriels, l'industrie consomme 0,3 € de produits agricoles et 0,1 € de produits industriels. On note $x$ et $y$ les productions totales (en millions d'euros) et $D = (60, 30)$ la demande finale (consommation des ménages).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Justifier que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie $X = AX + D$ avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre le système $(I - A)X = D$.

c) Calculer $(I - A)^{-1}$. En déduire que toute demande finale positive peut être satisfaite par des productions positives.

d) La demande industrielle augmente de 10 millions. De combien chaque production doit-elle augmenter ?

## Exercice 5 – Droite des moindres carrés

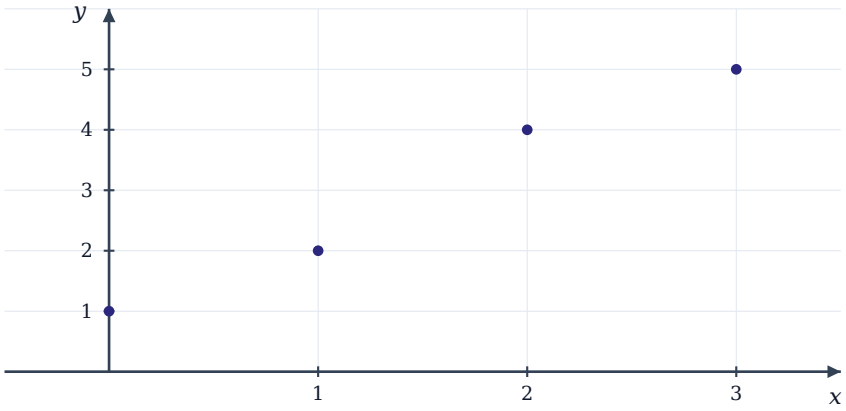
On a relevé quatre points expérimentaux : $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$.

a) Écrire le système exprimant que la droite $y = ax + b$ passe par les quatre points, sous la forme $MX = Y$. Est-il compatible ?

b) On cherche $(a, b)$ minimisant $S(a, b) = \sum_{i=1}^{4} (y_i - ax_i - b)^2$. En annulant les dérivées partielles de $S$, obtenir les équations normales.

c) Les résoudre, et calculer les résidus $y_i - ax_i - b$ ainsi que la valeur minimale de $S$.

d) Vérifier que ces équations s'écrivent $M^{\mathsf{T}}MX = M^{\mathsf{T}}Y$.




*Quatre mesures, non alignées.*

## Exercice 6 – Construire la formule de Simpson

On cherche des réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que la formule

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$$

soit **exacte** pour tout polynôme de degré $\leq 2$.

a) Montrer qu'il suffit de l'imposer pour $f = 1$, $f = t$, $f = t^2$, et résoudre le système obtenu.

b) La formule est-elle exacte pour $t^3$ ? pour $t^4$ ?

c) En déduire, par changement de variable affine, une formule approchée pour $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Application : comparer l'approximation de $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ à la valeur exacte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 7 – Équilibrer une réaction chimique

a) Équilibrer la combustion complète du propane :

$$a\,\mathrm{C_3H_8} + b\,\mathrm{O_2} \longrightarrow c\,\mathrm{CO_2} + d\,\mathrm{H_2O}$$

en écrivant la conservation de chaque élément. Quelle est la dimension de l'ensemble des solutions ? Donner la solution en entiers les plus petits.

b) Une combustion incomplète produit aussi du monoxyde de carbone :

$$a\,\mathrm{C_3H_8} + b\,\mathrm{O_2} \longrightarrow c\,\mathrm{CO} + d\,\mathrm{CO_2} + e\,\mathrm{H_2O}$$

Déterminer l'ensemble des solutions et sa dimension.

c) Interpréter chimiquement le résultat de b).

## Exercice 8 – Prestations réciproques entre services

Dans une entreprise, deux services auxiliaires travaillent pour les autres : l'entretien $E$ (coût propre 9 300 €) et l'informatique $I$ (coût propre 5 000 €). L'entretien consacre 20 % de son activité à l'informatique, 50 % à l'atelier et 30 % à la distribution ; l'informatique consacre 10 % de son activité à l'entretien, 60 % à l'atelier et 30 % à la distribution.

a) On note $x$ et $y$ les coûts complets de $E$ et $I$ (coût propre plus prestations reçues). Écrire le système vérifié par $(x, y)$ et le résoudre.

b) L'atelier et la distribution ont des coûts propres de 40 000 € et 25 000 €. Calculer leurs coûts après répartition.

c) Vérifier que le total des charges est conservé, et expliquer pourquoi.

d) Pourquoi ne peut-on pas répartir d'abord $E$, puis $I$, « en cascade » ?

## Exercice 9 – Température d'une plaque : la propriété de la moyenne

Une plaque carrée est discrétisée par une grille de $4 \times 4$ nœuds. Les 12 nœuds du bord sont maintenus à température fixée : 100 °C sur le bord supérieur (hors coins), 0 °C ailleurs. À l'équilibre, la température de chacun des 4 nœuds intérieurs est la **moyenne** des températures de ses 4 voisins. On note $T_1$, $T_2$ (rangée du haut, de gauche à droite) et $T_3$, $T_4$ (rangée du bas).

a) Écrire le système de 4 équations vérifié par les $T_i$.

b) Justifier que $T_1 = T_2$ et $T_3 = T_4$ (on admettra que le système a une unique solution), puis résoudre.

c) On porte maintenant **chacun** des quatre bords à 100 °C tour à tour. En utilisant la linéarité, calculer la température des nœuds intérieurs quand les quatre bords sont à 100 °C, et retrouver la moyenne des $T_i$ du b).

d) Montrer que, pour tout choix des températures du bord, la température maximale est atteinte au bord.

## Exercice 10 – Vélos en libre-service : la répartition d'équilibre

Un réseau de vélos comporte trois stations $A$, $B$, $C$. Chaque jour, un vélo situé en $A$ y reste avec probabilité 0,6, va en $B$ avec probabilité 0,3 et en $C$ avec probabilité 0,1 ; un vélo situé en $B$ va en $A$, $B$, $C$ avec probabilités 0,2 ; 0,7 ; 0,1 ; un vélo situé en $C$ va en $A$, $B$, $C$ avec probabilités 0,2 ; 0,2 ; 0,6. On note $(a_n, b_n, c_n)$ les proportions de vélos en $A$, $B$, $C$ le jour $n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Exprimer $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ en fonction de $(a_n, b_n, c_n)$.

b) Une répartition $(a, b, c)$ est **stationnaire** si elle est inchangée d'un jour à l'autre. Écrire le système vérifié et montrer que ses trois équations sont liées.

c) Déterminer l'unique répartition stationnaire de somme 1.

d) Le réseau compte 150 vélos. Combien de places prévoir au minimum dans chaque station si la répartition est stationnaire ?

## Exercice 11 – Raccorder deux voies par une cubique

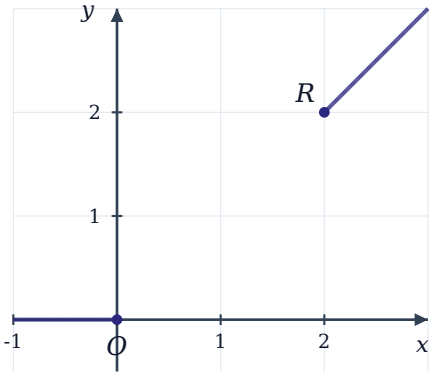
Une voie ferrée suit l'axe des abscisses pour $x \leq 0$, puis doit rejoindre, au point d'abscisse 2, une voie rectiligne d'équation $y = x$ (unités en centaines de mètres). On cherche le raccord sous la forme $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sur $[0, 2]$, sans cassure : même position et même pente aux deux extrémités.

a) Traduire les conditions par un système linéaire en $(a, b, c, d)$.

b) Le résoudre et vérifier.

c) Montrer que pour des données quelconques $p(0) = y_0$, $p'(0) = s_0$, $p(2) = y_1$, $p'(2) = s_1$, le système a toujours une unique solution.

d) Pourquoi un raccord par une parabole ($a = 0$) ne convient-il pas ici ?




*Les deux voies à raccorder entre O et R.*

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 12 – Poutre sur appuis : isostatique ou hyperstatique

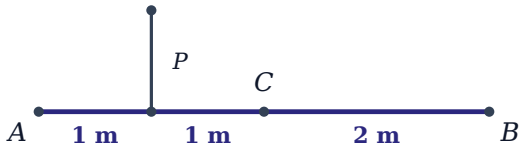
Une poutre horizontale de longueur 4 m, de poids négligeable, porte une charge verticale $P = 1\,200$ N à 1 m de son extrémité $A$.

a) La poutre repose sur deux appuis en $A$ et en $B$ (l'autre extrémité). Écrire l'équilibre des forces verticales et l'équilibre des moments par rapport à $A$. Calculer les réactions $R_A$ et $R_B$.

b) On ajoute un troisième appui $C$ au milieu de la poutre. Écrire le système en $(R_A, R_C, R_B)$. Quel est son rang ? Décrire l'ensemble des solutions.

c) Parmi ces solutions, lesquelles sont physiquement admissibles (réactions positives ou nulles) ?

d) Commenter : que faut-il ajouter au modèle pour déterminer les réactions ?




*Poutre de 4 m, charge P à 1 m de A, appui C (question b) au milieu.*

## Exercice 13 – Composer un repas équilibré

Pour 100 g, on dispose des apports suivants (en grammes) :

| Aliment | Protéines | Glucides | Lipides |
|---|---|---|---|
| Riz | 3 | 28 | 0 |
| Lentilles | 9 | 20 | 0 |
| Fromage | 25 | 0 | 30 |

On note $r$, $\ell$, $f$ les quantités de chaque aliment, en centaines de grammes.

a) On vise 58 g de protéines, 180 g de glucides et 30 g de lipides. Écrire et résoudre le système.

b) Montrer que, pour toute cible $(p, g, \lambda)$, le système a une unique solution, et l'exprimer.

c) Avec la cible $(40, 180, 30)$, que se passe-t-il ? Conclure sur la faisabilité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 14 – Débits dans un réseau de canalisations

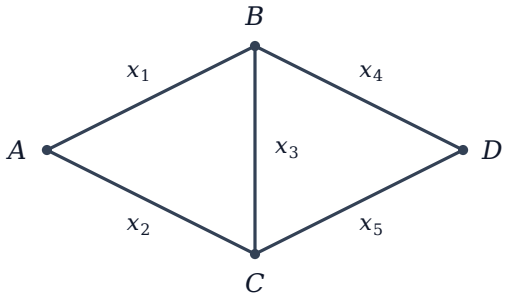
Un réseau d'eau comporte quatre nœuds $A$, $B$, $C$, $D$ et cinq canalisations orientées : $A \to B$ (débit $x_1$), $A \to C$ ($x_2$), $B \to C$ ($x_3$), $B \to D$ ($x_4$), $C \to D$ ($x_5$), en L/s. Il entre 100 L/s en $A$ ; il sort 40 L/s en $C$ et 60 L/s en $D$.

a) Écrire la conservation du débit en chaque nœud.

b) Montrer que l'une des équations est conséquence des autres, et résoudre en prenant $x_3$ et $x_5$ comme paramètres.

c) Chaque canalisation ne peut être parcourue que dans son sens, avec un débit d'au plus 50 L/s. Montrer que cela impose $x_1 = x_2 = 50$, puis décrire toutes les répartitions possibles.

d) Interpréter le nombre de paramètres.




*Réseau : entrée 100 L/s en A, sorties 40 L/s en C et 60 L/s en D.*

## Exercice 15 – Synthèse : la conique passant par cinq points

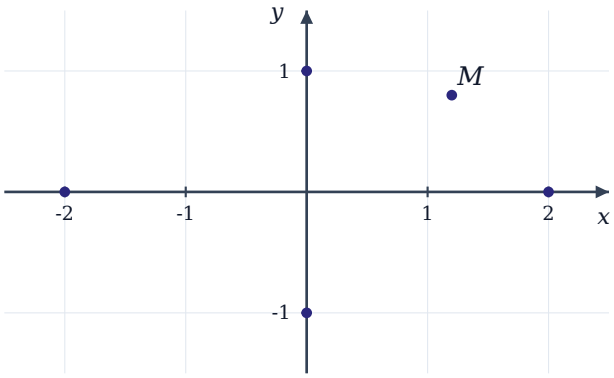
Une **conique** est une courbe d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

a) Expliquer pourquoi deux sextuplets proportionnels définissent la même courbe, et pourquoi l'on s'attend à ce que cinq points déterminent une conique.

b) Déterminer les coniques passant par les cinq points $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ et $\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Reconnaître la courbe.

c) Montrer que le système homogène de 5 équations à 6 inconnues associé à cinq points quelconques admet toujours une solution non nulle.

d) Que se passe-t-il pour les cinq points $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$ ? Décrire les coniques obtenues.




*Les cinq points de la question b).*

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).