Plaquette 1 – Pivot de Gauss, rang, compatibilité et systèmes à paramètre

Systèmes linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On échelonne par le **pivot de Gauss**, on lit le **rang** et le nombre d'inconnues secondaires, on discute la **compatibilité**, et on traite les systèmes dépendant d'un paramètre en repérant les valeurs critiques.

Exercice 1 – Système de Cramer 2x2

Résoudre $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

Exercice 2 – Remontée d'un système triangulaire

On considère le système

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 9 \\ 3y + 2z - t = 1 \\ 2z + 3t = 7 \\ 4t = 12 \end{cases}$$

a) Sans rien calculer, justifier que ce système admet une unique solution.

b) Le résoudre par remontée.

c) Pour un système triangulaire supérieur $n \times n$ à diagonale non nulle, dénombrer les multiplications et les divisions effectuées par la remontée.

Exercice 3 – Pivot de Gauss 3x3

Résoudre $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

Exercice 4 – Opérations simultanées interdites

Pour résoudre $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$, un élève effectue **en même temps** $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (chaque fois avec les lignes d'origine).

a) Résoudre correctement le système.

b) Écrire le système obtenu par l'élève et le résoudre. Les deux systèmes sont-ils équivalents ?

c) Expliquer l'erreur en écrivant la transformation sous forme matricielle.

d) Quelles opérations simultanées sont légitimes dans l'algorithme de Gauss ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Système incompatible

Résoudre $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$

Exercice 6 – Système indéterminé

Résoudre $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$

Exercice 7 – Système homogène

Résoudre $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Exercice 8 – Système à paramètre

Discuter et résoudre selon $m \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}$

Exercice 9 – Quatre inconnues

Résoudre $\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x - y + z - t = 0 \\ 2x + 2z = 4 \end{cases}$

Exercice 10 – Rang et compatibilité

Pour quelles valeurs de a le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 5z = a \end{cases}$ a-t-il des solutions ?

Exercice 11 – Compatibilité selon le second membre

Soient a, b, c trois réels et le système

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 5y + z = b \\ x + 3y + 2z = c \end{cases}$$

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que le système soit compatible.

b) Lorsqu'elle est vérifiée, résoudre le système.

c) Interpréter géométriquement l'ensemble des seconds membres (a, b, c) pour lesquels le système est compatible.

Exercice 12 – Système surdéterminé

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère trois équations à deux inconnues :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x + 3y = k \end{cases}$$

a) Pour quelles valeurs de k le système a-t-il une solution ? La donner.

b) Interpréter en termes de droites du plan.

c) Plus généralement, peut-on dire qu'un système de p équations à $n < p$ inconnues « a trop d'équations pour avoir une solution » ?

Exercice 13 – Interprétation géométrique

Que représente géométriquement le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$? Donner une représentation paramétrique de son ensemble de solutions.

Exercice 14 – Application concrète

Un atelier fabrique trois modèles A, B, C. Chaque unité consomme, en heures :

— A : 2 h de découpe, 1 h d'assemblage, 1 h de finition ;

— B : 1 h, 3 h, 1 h ;

— C : 1 h, 1 h, 2 h.

La semaine dispose de 100 h de découpe, 120 h d'assemblage et 110 h de finition, toutes utilisées. Déterminer le nombre d'unités de chaque modèle.

Exercice 15 – Synthèse : discussion complète

Discuter selon m le système $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).