Plaquette 2 – Structure des solutions : écriture matricielle, noyau et solution particulière

Systèmes linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Un système linéaire s'écrit $AX = B$, et le produit AX est la **combinaison linéaire des colonnes** de A de coefficients $x_1, \dots, x_n$. Tout découle de là : l'ensemble des solutions du système **homogène** $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - \mathrm{rg}A$; celui de $AX = B$ est vide ou de la forme « **une solution particulière + les solutions homogènes** » ; le système est compatible exactement quand B est combinaison des colonnes. On cherche donc toujours une solution particulière (évidente, ou par le pivot), puis une **base** des solutions homogènes.

Exercice 1 – Écriture matricielle et combinaison de colonnes

On considère le système

$$(S) \quad \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

a) Écrire (S) sous la forme $AX = B$, puis sous la forme $xC_1 + yC_2 + zC_3 = B$.

b) Vérifier que $X_0 = (1, 1, 0)$ est solution. Quelle relation entre colonnes cela traduit-il ?

c) Résoudre le système homogène associé et en donner une base.

d) En déduire l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 2 – Principe de superposition

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $B_1 = AX_1$ et $B_2 = AX_2$.

b) Sans résoudre de système, trouver une solution de $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que le système homogène $AX = 0$ n'a que la solution nulle. Qu'en déduit-on pour la solution trouvée en b) ?

d) Interprétation : un dispositif « linéaire » répond B_1 à l'excitation X_1 et B_2 à X_2. Quelle excitation produit la réponse $\lambda B_1 + \mu B_2$?

Exercice 3 – Solution évidente et solutions homogènes

Soit le système à quatre inconnues

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 3 \\ 2x + y + z - t = 3 \\ x - y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

a) Trouver une solution évidente (penser aux sommes de coefficients).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que L_3 est combinaison de L_1 et L_2.

c) Déterminer une base de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

d) Écrire l'ensemble des solutions. Quelle est sa dimension ?

Exercice 4 – Zéro, une ou une infinité de solutions

Soient $A \in M_{p,n}(\mathrm{K})$ et $B \in M_{p,1}(\mathrm{K})$.

a) Montrer que si X_1 et X_2 sont deux solutions de $AX = B$, alors $X_2 - X_1$ est solution du système homogène.

b) On suppose $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $X_1 \neq X_2$. Montrer que $X_1 + t(X_2 - X_1)$ est solution pour tout $t \in \mathrm{K}$, et en déduire que le système a une infinité de solutions.

c) Conclure : combien de solutions peut avoir un système réel ?

d) Sur $\mathrm{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, résoudre $x + y = 1$. Le résultat de c) subsiste-t-il ? Où la preuve de b) échoue-t-elle ?

Exercice 5 – Plus d'inconnues que d'équations

a) Soit un système **homogène** de p équations à n inconnues avec $p < n$. Montrer, à l'aide du pivot de Gauss, qu'il admet une solution non nulle.

b) Application : montrer que les vecteurs $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,0)$, $u_4 = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ sont liés, et expliciter une relation de dépendance linéaire.

c) Ce résultat reste-t-il vrai pour un système **non homogène** de $p < n$ équations ?

Exercice 6 – Base des solutions d'un système homogène

Résoudre dans $\mathbb{R}^5$ le système homogène

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Échelonner le système et déterminer son rang.

b) Donner une base de l'ensemble S_0 des solutions, et sa dimension.

c) Vérifier le résultat par la formule du rang.

Exercice 7 – Deux systèmes équivalents

On considère

$$(S_1)\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S_2)\ \begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Résoudre (S_1) et (S_2).

b) Exprimer chaque équation de (S_2) comme combinaison des équations de (S_1), et réciproquement.

c) Énoncer le principe qui justifie que deux systèmes dont les équations se déduisent les unes des autres par combinaisons linéaires ont les mêmes solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Système à coefficients complexes

a) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} x + iy = 1 + i \\ ix + y = 2i \end{cases}$

b) On considère un système $AX = B$ à coefficients **réels**. Montrer que si $X = U + iV$ (U, V réels) est une solution complexe, alors U est solution réelle et V est solution du système homogène.

c) Application : vérifier que $(1 + i,\ 1 + i,\ -1 - 2i)$ est solution de $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$, et en déduire une solution réelle et une solution homogène réelle.

Exercice 9 – Le jeu des lampes

Des lampes sont alignées, toutes éteintes. Appuyer sur la lampe i **change l'état** de la lampe i et de ses voisines immédiates. Appuyer deux fois revient à ne rien faire, et l'ordre des appuis est sans importance : on travaille dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec $x_i = 1$ si l'on appuie sur la lampe i.

a) Avec 3 lampes, écrire le système traduisant « toutes les lampes sont allumées à la fin » et le résoudre.

b) Même question avec 4 lampes.

c) Avec 5 lampes, vérifier que $K = (1, 1, 0, 1, 1)$ est solution du système homogène. Interpréter.

d) Avec 5 lampes, montrer que la configuration « seule la lampe 1 allumée » est inaccessible. (On admettra que la matrice M du système est symétrique et on calculera $K^{\mathsf{T}}MX$ de deux façons.)

e) Toujours avec 5 lampes, trouver toutes les façons d'allumer toutes les lampes.

Exercice 10 – Retrouver un système à partir de ses solutions

a) Trouver un système d'équations dont l'ensemble des solutions est la droite affine $D = \{(1 + t,\ 2 - t,\ 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Trouver un système homogène de $\mathbb{R}^4$ dont l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 0, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1, 1)$.

c) Combien d'équations faut-il au minimum dans chaque cas ? Justifier.

Exercice 11 – Existence pour tout second membre, unicité

Soit $A \in M_{p,n}(\mathrm{K})$ de rang r (nombre de pivots après échelonnement).

a) Montrer que $AX = B$ admet **au plus une** solution pour tout B si et seulement si $r = n$.

b) Montrer que $AX = B$ admet **au moins une** solution pour tout B si et seulement si $r = p$.

c) En déduire que pour une matrice carrée, « existence pour tout B » et « unicité » sont équivalentes.

d) Une matrice $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ peut-elle donner l'unicité ? L'existence pour tout B ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Résoudre deux systèmes d'un coup

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 34 \end{pmatrix}$.

a) Résoudre simultanément $AX = B_1$ et $AX = B_2$ en échelonnant la matrice $(A \mid B_1\ B_2)$.

b) Interpréter : si $X = (a, b, c)$, que signifie $AX = B$ pour le polynôme $P = a + bX + cX^2$?

c) Retrouver la solution de $AX = B_1$ sans calcul, par un polynôme bien choisi.

Exercice 13 – Conditions de compatibilité par la transposée

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si $Y \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifie $A^{\mathsf{T}}Y = 0$ et si $AX = B$ a une solution, alors $Y^{\mathsf{T}}B = 0$.

b) Déterminer le rang de A, puis les solutions de $A^{\mathsf{T}}Y = 0$.

c) En déduire une condition nécessaire de compatibilité de $AX = B$, et montrer qu'elle est suffisante.

d) Comparer les dimensions des solutions de $AX = 0$ et de $A^{\mathsf{T}}Y = 0$.

Exercice 14 – Lire les solutions sur la forme échelonnée réduite

Résoudre par la méthode de Gauss-Jordan (pivots égaux à 1 et zéros au-dessus **et** au-dessous de chaque pivot) :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

a) Donner la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée.

b) Identifier les inconnues principales et secondaires ; écrire les solutions.

c) Pourquoi la colonne de x_2 n'a-t-elle pas de pivot ?

Exercice 15 – Synthèse : polynômes soumis à des conditions linéaires

Soient k, m deux réels. On cherche les polynômes $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que

$$P(1) + P(-1) = 2, \qquad P(1) - P(-1) = 2k, \qquad \int_{-1}^{1} xP(x)\,\mathrm{d}x = m, \qquad P'(0) = 1$$

a) Traduire ces conditions en un système linéaire d'inconnues (a, b, c, d).

b) Résoudre le système homogène associé.

c) Déterminer la condition de compatibilité portant sur (k, m).

d) Lorsqu'elle est vérifiée, décrire tous les polynômes solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).