Plaquette 2 – Équations et inéquations trigonométriques

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équations de base ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = \pm b + 2k\pi, \qquad \sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \text{ ou } a = \pi - b + 2k\pi$$

— $\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi$ (avec $a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).

— **Transformations** : $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$;
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

— **Forme réduite** : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$.

— **Arc moitié** : si $x \neq \pi + 2k\pi$ et $t = \tan\frac{x}{2}$, alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

Correction de l'exercice 1 – Égalité de deux cosinus

a)

$$2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

— Première famille : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Seconde : $3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$.

b) Première famille : $\frac{\pi}{3}$. Seconde : $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{11\pi}{9}$, $\frac{17\pi}{9}$ ($k = 1, 2, 3$). Quatre solutions : $\frac{3\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{11\pi}{9}$, $\frac{17\pi}{9}$.

c) Une pour la première (période 2π), trois pour la seconde (période $\frac{2\pi}{3}$).

d) $x = \frac{5\pi}{9}$: $\cos\frac{10\pi}{9} \approx -0{,}940$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{9} + \frac{3\pi}{9}\right) = \cos\frac{8\pi}{9} \approx -0{,}940$ ✓ ($\frac{10\pi}{9}$ et $\frac{8\pi}{9}$ sont symétriques par rapport à π).

Réponse. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$; dans $[0, 2\pi[$: $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}$.

Correction de l'exercice 2 – Sinus contre cosinus

a) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

b) $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:

$$3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$$

— $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

c) $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$: six solutions.

d) $\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$ (angles complémentaires) ✓ ; $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ ✓

Réponse. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{4} + k\pi$; six solutions dans $[0, 2\pi[$.

Correction de l'exercice 3 – Équation du second degré en cos x

a) $2(1 - X^2) + 3X - 3 = -2X^2 + 3X - 1 = -(2X - 1)(X - 1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 1$:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = 2k\pi$$

c) $-(2X-1)(X-1) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < X < 1$, soit $\frac{1}{2} < \cos x < 1$: $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.

d) L'arc de cercle entre les points d'abscisse $\frac{1}{2}$ (angles $\pm\frac{\pi}{3}$), contenant I, privé de I lui-même (où $\cos x = 1$ annule l'expression).

Réponse. $\cos x \in \{\frac{1}{2}, 1\}$; inéquation : $x \in]-\frac{\pi}{3}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{3}[$.

Correction de l'exercice 4 – Une équation en tangente piégée

a) Il faut $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ (la seconde condition, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, est incluse).

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

c) Ces valeurs sont exactement de la forme exclue : **aucune solution**.

$$S = \varnothing$$

d) Domaine : $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. $2x = x + k\pi$ donne $x = k\pi$, qui est dans le domaine : $S = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. **Leçon** : toujours écrire le domaine avant de résoudre une équation en tangente.

Réponse. $\tan 2x = \tan(x + \frac{\pi}{4})$: aucune solution ; $\tan 2x = \tan x$: $x = k\pi$.

Correction de l'exercice 5 – Inéquations lues sur le cercle

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$ pour $x = \frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$; le sinus est plus petit entre les deux (demi-cercle inférieur) :

$$x \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$$

b) $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) > 0$; $\cos x - 1 \leq 0$, nul seulement en 0 : il faut $\cos x < -\frac{1}{2}$, soit $x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[$.

c) Il faut $\cos x > 0$ (le membre de gauche est ≥ 0), puis $|\tan x| < 1$: $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

d) L'arc inférieur de A à B, en passant par le point d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

Réponse. a) $[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$; b) $]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$; c) $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

Correction de l'exercice 6 – Forme réduite et équation

a) $A = \sqrt{3+1} = 2$; $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

— Dans $[0, 2\pi[$: $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{19\pi}{12}$.

c) $m \in [-2, 2]$.

d) Maximum 2 quand $x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi$, soit $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (contrôle : $\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2$ ✓).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $2\cos(x+\frac{\pi}{6})$; solutions $\frac{\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$; $m \in [-2,2]$; max 2 en $-\frac{\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 7 – Nombre de solutions selon un paramètre

a) $2x$ parcourt $[0, 4\pi[$: deux tours de cercle.

b) Sur un tour, $\cos\theta = m$ a 2 solutions si $|m| < 1$, une si $m = \pm 1$, aucune si $|m| > 1$. Sur deux tours :

$$|m| < 1 : 4 \text{ solutions}; \quad m = \pm 1 : 2 \text{ solutions}; \quad |m| > 1 : \text{aucune}$$

c) $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\rangle$.

d) La courbe a deux « bosses » sur $[0, 2\pi]$: une droite horizontale $y = m$ avec $|m| < 1$ la coupe en quatre points.

Réponse. 4 solutions si $|m| < 1$, 2 si $|m| = 1$, 0 sinon ; $m = \frac{1}{2}$: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 8 – Somme de trois cosinus

a) $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$.

b)

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos 2x\,(2\cos x + 1)$$

c) $\cos 2x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, soit $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. $\cos x = -\frac{1}{2}$: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$. Six solutions (vérifiées numériquement).

d) $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x$, d'où $\sin 2x\,(2\cos x + 1) = 0$: $x = \frac{k\pi}{2}$ $(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2})$ ou $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Réponse. $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$: $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 9 – Un système trigonométrique

a) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

b) $\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$: l'équation devient

$$\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = 2k\pi$$

c) $x - y = 4k\pi$ et $x + y = \frac{2\pi}{3}$: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{3} - 2k\pi$. Contrôle : $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = 1$ ✓

d) Il faudrait $\cos\frac{x-y}{2} = \frac{3}{2} > 1$: aucune solution.

Réponse. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{3} - 2k\pi$; le second système n'a pas de solution.

Correction de l'exercice 10 – Substitution t = tan(x/2)

a) $2 \times 0 + (-1) = -1 \neq 1$: non.

b) $\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow 4t + 1 - t^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow 2t^2 - 4t = 0$.

c) $t = 0$ ou $t = 2$:

$$x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = 2\arctan 2 + 2k\pi \ (\approx 2{,}214)$$

— Contrôle : $2\sin(2{,}214) + \cos(2{,}214) = 1$ (numériquement) ✓

d) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$: $\cos(x-\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \cos\varphi$, d'où $x = 2\varphi + 2k\pi$ ou $x = 2k\pi$; et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$2\varphi = 2\arctan 2$ ✓

Réponse. $x = 2k\pi$ ou $x = 2\arctan 2 + 2k\pi$.

Correction de l'exercice 11 – Puissances quatrièmes

a) $(\sin^2 + \cos^2)^2 = 1$ donne $\sin^4 + \cos^4 = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2$.

b) $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$, $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

c) $\sin^2 2x \in [0, 1]$: l'expression varie entre $\frac{1}{2}$ (en $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$) et 1 (en $x = \frac{k\pi}{2}$).

d) $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$, donc $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ (période $\frac{\pi}{2}$, visible sur la courbe).

Réponse. $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$; solutions $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$; valeurs dans $[\frac{1}{2}, 1]$.

Correction de l'exercice 12 – Équation avec angle double et tangente

a) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x(1 - \tan^2 x)$ et $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$; de même $\sin 2x = 2\tan x \cos^2 x$.

b) $\frac{1 - u^2 + 2u}{1 + u^2} = 1 \Leftrightarrow 2u - 2u^2 = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ou $u = 1$:

$$x = k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

c) Exclus : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, où $\cos 2x + \sin 2x = -1 + 0 = -1 \neq 1$: rien n'est perdu.

d) $\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$: $2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = k\pi$ ✓

Réponse. $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Correction de l'exercice 13 – Arcs et cordes

a)
$AB^2 = (\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2 - 2\cos(b - a)$, et $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$.

b) Deux sommets consécutifs sont séparés de $\frac{2\pi}{n}$: côté $2\sin\frac{\pi}{n}$.

c)

$$p_n = 2n\sin\frac{\pi}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2\pi$$

— car $\sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$: le périmètre du polygone tend vers celui du cercle.

d) $p_6 = 12 \times \frac{1}{2} = 6$; $p_{12} = 24 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 6{,}212$ (à comparer à $2\pi \approx 6{,}283$: méthode d'Archimède).

Réponse. $AB = 2\left|\sin\frac{b - a}{2}\right|$; $p_n = 2n\sin\frac{\pi}{n} \to 2\pi$; $p_6 = 6$, $p_{12} \approx 6{,}212$.

Correction de l'exercice 14 – Inéquation avec deux fonctions

a) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ 2k\pi$; dans $[0, 2\pi[$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[$$

c) Le point $M(\cos x, \sin x)$ doit être sous la droite $y = x$: arc de $\frac{5\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$ en passant par I.

d) $\cos^2 x > \sin^2 x \Leftrightarrow \cos 2x > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

Réponse. $\cos x > \sin x$: $[0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{5\pi}{4}, 2\pi[$; $|\cos x| > |\sin x| \Leftrightarrow \cos 2x > 0$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : combien de solutions pour sin x = x/10 ?

a) $|\sin x| \leq 1$ impose $\left|\frac{x}{10}\right| \leq 1$. Si x est solution, $\sin(-x) = -\sin x = \frac{-x}{10}$: $-x$ aussi.

b) Sur $]0, 10]$, une solution impose $\sin x > 0$, donc $x \in]0, \pi[$ ou $]2\pi, 3\pi[$ (car $3\pi \approx 9{,}42 < 10 < 4\pi$). Sur $]0, \pi[$: une intersection (sin part au-dessus de la droite, pente $1 > \frac{1}{10}$, et finit en dessous). Sur $]2\pi, 3\pi[$: la bosse du sinus atteint $1 > \frac{2{,}5\pi}{10} \approx 0{,}79$ au sommet, et vaut 0 aux bords, alors que la droite est entre 0,63 et 0,94 : **deux** intersections.

c) Solutions positives : 3 ; avec 0 et la symétrie :

$$1 + 2 \times 3 = 7 \text{ solutions}$$

d) $2{,}85 \in]0, \pi[$, 7,07 et $8{,}42 \in]2\pi, 3\pi[\approx]6{,}28\,;9{,}42[$ ✓

Réponse. $|x| \leq 10$, symétrie ; 1 solution dans $]0, \pi[$, 2 dans $]2\pi, 3\pi[$: 7 solutions au total.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).