Plaquette 4 – Fonctions trigonométriques : études, limites et inégalités

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées : $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

— **Limites de référence** : $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$, $\frac{\tan x}{x} \to 1$ en 0.

— **Encadrements** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x, \qquad 1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$$

— **Réduction du domaine** : T-périodique et paire (ou impaire) : étude sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, puis symétries.

— **Lipschitz** : $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$, $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$.

Correction de l'exercice 1 – Étude de sin x + ½ sin 2x

a) f est 2π-périodique et impaire : l'étude sur $[0, \pi]$ suffit (symétrie centrale en O, puis translations de 2π).

b) $f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

c) Sur $[0, \pi]$: $\cos x + 1 \ge 0$ (nul en π) ; $2\cos x - 1 > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$, < 0 ensuite. f croît sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, décroît sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$:

$$\max f = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}30$$

— Par imparité, $\min f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (en $-\frac{\pi}{3}$).

d) Le sommet de la courbe est bien vers $x \approx 1{,}05$, $y \approx 1{,}3$ ✓

Réponse. $f' = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$; $\max f = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ en $\frac{\pi}{3}$, $\min f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Correction de l'exercice 2 – La fonction tangente

a) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$; π-périodique ; impaire.

b) $\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 > 0$: strictement croissante.

c) $\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$, $\lim_{x \to -\pi/2^+} \tan x = -\infty$ (asymptotes verticales). Tangente en 0 : $y = x$ ($\tan'(0) = 1$).

d) $g(x) = \tan x - x$: $g'(x) = \tan^2 x \ge 0$, $g(0) = 0$, donc

$$\tan x \ge x \quad \text{sur} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Réponse. tan : π-périodique, impaire, strictement croissante, $\tan' = 1 + \tan^2$; $\tan x \ge x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Inégalité de Jordan

a) $\sin'' = -\sin \le 0$ sur $[0, \pi]$.

b) Une fonction concave est au-dessus de ses cordes : sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la corde est $y = \frac{2}{\pi}x$.

c) La majoration $\sin x \le x$ vient de la tangente en 0 (sous laquelle reste une fonction concave) :

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$

d) $-\sin x \le -\frac{2x}{\pi}$ et exp croissante ; intégrer :
$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-2x/\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[-\mathrm{e}^{-2x/\pi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 0{,}993$.

Réponse. $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (concavité) ; intégrale $\le \frac{\pi}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1})$.

Correction de l'exercice 4 – Le sinus est 1-lipschitzien

a) Formule $\sin p - \sin q$ avec $p = x$, $q = y$.

b) $|\cos| \le 1$ et $|\sin t| \le |t|$:

$$|\sin x - \sin y| \le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le |x - y|$$

c) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$, même majoration.

d) $|\sin u_n - \sin \ell| \le |u_n - \ell| \to 0$: l'erreur sur le sinus est au plus l'erreur sur l'argument (par exemple, une approximation de π à 10^{-3} donne sin à 10^{-3} près).

Réponse. $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ et $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$.

Correction de l'exercice 5 – Étude de cos x + cos 2x

a) 2π-périodique et paire : étude sur $[0, \pi]$.

b) $g' = -\sin x - 2\sin 2x = -\sin x - 4\sin x\cos x = -\sin x(1 + 4\cos x)$.

c) Sur $]0, \pi[$, $\sin x > 0$; $1 + 4\cos x > 0 \Leftrightarrow x < \alpha$. g décroît sur $[0, \alpha]$, croît sur $[\alpha, \pi]$; $g(0) = 2$, $g(\pi) = 0$.

d) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{7}{8}$:

$$\min g = g(\alpha) = -\frac{1}{4} - \frac{7}{8} = -\frac{9}{8}$$

— $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 1{,}82$: c'est bien le creux de la courbe ($\approx -1{,}13$) ✓

Réponse. $g' = -\sin x(1 + 4\cos x)$; $\max g = 2$ en 0, $\min g = -\frac{9}{8}$ en $\pm\arccos(-\frac{1}{4})$.

Correction de l'exercice 6 – Limites de référence

a) Aire$(OIM) = \frac{1}{2}\sin x$, secteur $= \frac{x}{2}$, aire$(OIT) = \frac{1}{2}\tan x$ ($IT = \tan x$) ; les figures sont emboîtées : $\sin x \le x \le \tan x$.

b) On divise par $\sin x > 0$ et on inverse : $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$; $\cos x \to 1$, gendarmes (et parité pour $x < 0$).

c)

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $\tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x)$, donc $\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} \to 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Réponse. $\sin x \le x \le \tan x$; $\frac{\sin x}{x}\to 1$; $\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{1}{2}$; $\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\to\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Les solutions de tan x = x

a) $h(x)=\tan x - x$ sur I_k : $h'=\tan^2 x\ge 0$ (nul en un seul point) donc h strictement croissante, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes : une unique racine (TVI).

b) $x_0=0$. Pour $k\ge 1$, sur $\left]k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right]$, $\tan x\le 0<x$: pas de solution ; donc $x_k\in\left]k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right[$.

c) $\frac{3\pi}{2}\approx 4{,}7124$: x_1 est un peu avant l'asymptote.

d) $x_k=\arctan(x_k)+k\pi$ et $x_k\to+\infty$, donc

$$x_k - k\pi = \arctan x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Réponse. Une solution x_k par intervalle I_k ; $x_1\approx 4{,}4934$; $x_k-k\pi-\frac{\pi}{2}\to 0$.

Correction de l'exercice 8 – Encadrements polynomiaux du sinus

a) $\sin x\le x$ (exercice 2, ou $x-\sin x$ croissante). Intégrer $\sin t\le t$ sur $[0,x]$: $1-\cos x\le\frac{x^2}{2}$.

b) Intégrer $\cos t\ge 1-\frac{t^2}{2}$ sur $[0,x]$:

$$\sin x\ge x-\frac{x^3}{6}$$

c) $x=0{,}5$: $x-\sin x\approx 0{,}02057\le\frac{0{,}125}{6}\approx 0{,}02083$ ✓

d) Erreur $\le\frac{0{,}001}{6}\approx 1{,}7\times10^{-4}$ (valeur exacte $\approx 1{,}67\times10^{-4}$: la borne est presque atteinte, le terme suivant étant en x^5).

Réponse. $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$ pour $x\ge 0$; erreur $\le\frac{x^3}{6}$.

Correction de l'exercice 9 – Lire un signal sinusoïdal

a) Valeurs extrêmes ± 2 : $A=2$. Deux oscillations complètes sur $[0,2\pi]$: période π, donc $\omega=2$.

b) $s(0)=1$ et s croît en 0 (premier maximum en $\frac{\pi}{6}$). $2\cos\varphi=1$ donne $\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$; $s'(0)=-2\omega\sin\varphi>0$ impose $\sin\varphi<0$: $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

c)

$$s(t)=2\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2t+\sqrt{3}\sin 2t$$

d) $\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$: $2t-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $t=k\pi$ ou $t=\frac{\pi}{3}+k\pi$: $0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3},\ 2\pi$.

Réponse. $s(t)=2\cos(2t-\frac{\pi}{3})=\cos 2t+\sqrt{3}\sin 2t$; $s=1$ en $0,\frac{\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},2\pi$.

Correction de l'exercice 10 – Aire des polygones réguliers inscrits

a) Chaque triangle OA_kA_{k+1} a deux côtés 1 et un angle $\frac{2\pi}{n}$: aire $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$.

b) $A_4=2$, $A_6=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}598$, $A_{12}=6\sin\frac{\pi}{6}=3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $A_n = \pi \cdot \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} \to \pi$ (limite de référence).

d) $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$: $\varphi'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ et $x\cos x - \sin x$ a pour dérivée $-x\sin x \le 0$ sur $[0,\pi]$, nulle en 0 : $\varphi' \le 0$. Donc φ décroît, et

$$A_n = \pi\,\varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

— croît quand $\frac{2\pi}{n}$ décroît.

Réponse. $A_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$: 2, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 3 ; croissante vers π.

Correction de l'exercice 11 – Étude de x − sin x et applications

a) $h'(x) = 1 - \cos x \ge 0$, nulle seulement en $2k\pi$ (points isolés) : h est strictement croissante ; $h(x) \to \pm\infty$ en $\pm\infty$ ($|\sin| \le 1$). Continue et strictement croissante : bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Conséquence directe de a).

c) $h(x) = 1$: $h(x) \le \frac{x^3}{6}$ donne $x \ge 6^{1/3} \approx 1{,}817$; $h(2) = 2 - 0{,}909 = 1{,}09 > 1$ donc $x < 2$:

$$1{,}817 \le x < 2$$

— (valeur numérique ≈ 1,934).

d) L'équation de Kepler donne l'anomalie excentrique E d'une planète à partir du temps (M) ; h strictement croissante garantit une position unique à chaque instant.

Réponse. h bijection croissante de $\mathbb{R}$; solution de $x - \sin x = 1$ dans $[1{,}817\,;2[$ (≈ 1,934).

Correction de l'exercice 12 – Étude d'une fraction trigonométrique

a) $2 + \cos x \ge 1 > 0$; périodicité et imparité immédiates.

b) $f' = \frac{\cos x(2+\cos x) + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$.

c) Sur $[0,\pi]$, $f' > 0 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{2\pi}{3}$. Maximum :

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{2 - 1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$$

— et, par imparité, minimum $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $|f(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $2 + \cos x > 0$.

Réponse. $f' = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$; extremums $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ en $\pm\frac{2\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 13 – Continuité et limite à l'infini

a) $\sin(n\pi) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$: deux suites tendant vers $+\infty$ donnent deux limites différentes, donc pas de limite.

b) $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x} \to 0$.

c) En 0 : $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \to 0$. En $+\infty$: avec $u = \frac{1}{x} \to 0^+$,

$$x\sin\frac{1}{x} = \frac{\sin u}{u} \to 1$$

d) Non : $x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$ donne 0, $y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \to 0$ donne 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. sin sans limite en $+\infty$; $\frac{\sin x}{x} \to 0$; $x \sin \frac{1}{x} \to 0$ en 0 et 1 en $+\infty$; $\sin \frac{1}{x}$ sans limite en 0.

Correction de l'exercice 14 – Maximum d'une somme de sinus d'angles d'un triangle

a) $\cos \frac{a-b}{2} \leq 1$ et $\sin \frac{a+b}{2} \geq 0$.

b) Même inégalité avec c et $\frac{\pi}{3}$.

c) Somme $\leq 2 \sin \frac{a+b}{2} + 2 \sin \frac{c+\pi/3}{2} \leq 4 \sin \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+\pi/3}{2}\right)$, et $\frac{a+b+c+\pi/3}{4} = \frac{4\pi/3}{4} = \frac{\pi}{3}$.

d)

$$\sin a + \sin b + \sin c \leq 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

— avec égalité si et seulement si toutes les inégalités sont des égalités : $a = b$, $c = \frac{\pi}{3}$, etc., soit le triangle **équilatéral**.

Réponse. $\sin a + \sin b + \sin c \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, égalité pour le triangle équilatéral.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète de sin x + cos 2x

a) $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(2\pi - 2x) = \cos 2x$: courbe symétrique par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$. Étude sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (longueur π), le reste par symétrie et périodicité.

b) $f'(x) = \cos x - 2 \sin 2x = \cos x(1 - 4 \sin x)$.

c) Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geq 0$; $1 - 4 \sin x > 0 \Leftrightarrow x < \beta = \arcsin \frac{1}{4}$. Croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \beta\right]$, décroissante sur $\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]$. $f(\beta) = \frac{1}{4} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{9}{8}$; $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 1 = -2$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$:

$$\max f = \frac{9}{8}, \qquad \min f = -2$$

d) $\sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x(1 - 2 \sin x) = 0$: $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Réponse. $f' = \cos x(1 - 4 \sin x)$; max $= \frac{9}{8}$ (en $\arcsin \frac{1}{4}$), min $= -2$ (en $-\frac{\pi}{2}$) ; $f = 1$: $k\pi$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).