Plaquette 1 – Formules d'addition, équations et linéarisation

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Valeurs remarquables : $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ (et symétriquement pour le sinus).

— **Relation fondamentale** : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

— **Addition** :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

— **Duplication** : $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$ et $\sin(2a)=2\sin a\cos a$.

— **Linéarisation** : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$.

— **Équations** : $\cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi$ **ou** $x=-\alpha+2k\pi$; $\sin x=\sin\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi$ **ou** $x=\pi-\alpha+2k\pi$.

— **Forme** $A\cos(x-\varphi)$: $a\cos x+b\sin x=A\cos(x-\varphi)$ avec $A=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\frac{a}{A}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{A}$.

— **Factorisation** : $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

— $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, définie pour $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Correction de l'exercice 1 – Valeurs remarquables

On se ramène aux angles du premier quadrant à l'aide du cercle.

— $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$, donc $\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

— $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$, donc $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

— $\frac{7\pi}{4}=2\pi-\frac{\pi}{4}$, donc $\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

— $\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$.

Réponse. $-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 2 – Formule d'addition

On écrit $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ et on applique la formule d'addition.

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

— $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.

— $=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Valeur approchée : $\dfrac{1{,}414+2{,}449}{4}\approx 0{,}966$, cohérent avec $\cos 15°\approx 0{,}966$.

Réponse. $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\approx 0{,}966$.

Correction de l'exercice 3 – Duplication

— Relation fondamentale : $\sin^2 x=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$, et x étant dans le premier quadrant, $\sin x=\dfrac{4}{5}$.

— $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\times\dfrac{9}{25}-1=\dfrac{18-25}{25}=-\dfrac{7}{25}$.

— $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{25}$.

— Contrôle : $\left(-\dfrac{7}{25}\right)^2+\left(\dfrac{24}{25}\right)^2=\dfrac{49+576}{625}=1$. Correct.

— Remarque : $\cos 2x<0$ signifie que $2x$ est dans le deuxième quadrant, ce qui est cohérent avec $x\approx 0{,}927$ rad.

Réponse. $\sin x=\dfrac{4}{5}$; $\cos 2x=-\dfrac{7}{25}$; $\sin 2x=\dfrac{24}{25}$.

Correction de l'exercice 4 – Équation en cosinus

On identifie $\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$, puis on applique la règle du cours.

$$\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad\text{ou}\quad x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

— **Dans** $[0\,;2\pi]$: la première famille donne $x=\dfrac{\pi}{3}$; la seconde donne $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{5\pi}{3}$.

— Les solutions sont donc $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$.

— **Erreur classique** : oublier la seconde famille $-\alpha+2k\pi$, qui correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Réponse. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$; dans $[0\,;2\pi]$: $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 5 – Équation en sinus

On reconnaît $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{4}$.

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad\text{ou}\quad x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

— Dans $[0\,;2\pi]$: $x=\dfrac{\pi}{4}$ et $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

— **Différence avec le cosinus** : la seconde famille est $\pi-\alpha$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées), et non $-\alpha$.

Réponse. $x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 6 – Équation avec transformation

Méthode 1 : duplication. On reconnaît $2\cos^2 x-1=\cos 2x$.

— L'équation devient $\cos 2x=0$, donc $2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, soit $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$.

— Dans $[0\,;2\pi]$: $x\in\left\{\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\,;\dfrac{5\pi}{4}\,;\dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Méthode 2 : directe. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, donc $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui donne les mêmes quatre solutions.

— Les deux méthodes concordent ; la première est plus rapide dès qu'on reconnaît la formule de duplication.

Réponse. $x \in \left\{\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 7 – Inéquation trigonométrique

On raisonne sur le **cercle trigonométrique**.

— $\cos x = \frac{1}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$.

— Le cosinus est l'**abscisse** du point du cercle : la condition $\cos x \geq \frac{1}{2}$ correspond à l'arc situé à droite de la verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$.

— Cet arc va de $-\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{3}$, soit, dans $[0\,;2\pi]$:

$$x \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right]$$

— Contrôle : $x = 0$ donne $\cos 0 = 1 \geq 0{,}5$ ✓ ; $x = \pi$ donne $-1 < 0{,}5$ ✗ (exclu, cohérent).

Réponse. $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right]$.

Correction de l'exercice 8 – Linéarisation

On part de $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et l'on élève au cube.

— $\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3$.

— Développement par le binôme : $e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}$.

— On regroupe les termes conjugués : $= (e^{3ix} + e^{-3ix}) + 3(e^{ix} + e^{-ix}) = 2\cos 3x + 6\cos x$.

$$\cos^3 x = \frac{2\cos 3x + 6\cos x}{8} = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

— Contrôle en $x = 0$: à gauche 1 ; à droite $\frac{1+3}{4} = 1$. Correct.

Réponse. $\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$.

Correction de l'exercice 9 – Forme A cos(x − φ)

Formule du cours : $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$.

— $A = \sqrt{1+3} = 2$.

— $\cos\varphi = \frac{a}{A} = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

— Vérification en développant :
$2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\cos x}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin x}{2}\right) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$. Correct.

— **Intérêt** : l'expression apparaît comme une sinusoïde d'amplitude 2, ce qui donne immédiatement son maximum (2) et son minimum (−2).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 10 – Résoudre avec la forme réduite

On utilise la forme réduite de l'exercice précédent.

— L'équation devient $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$, soit $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

— Donc $x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

— Première famille : $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; seconde : $x=2k\pi$.

— Dans $[0\,;2\pi]$: $x\in\left\{0\,;\frac{2\pi}{3}\,;2\pi\right\}$.

— Vérification pour $x=0$: $1+0=1$ ✓. Pour $x=\frac{2\pi}{3}$: $-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$ ✓.

Réponse. $x\in\left\{0\,;\frac{2\pi}{3}\,;2\pi\right\}$.

Correction de l'exercice 11 – Somme en produit

On **factorise** avec la formule du cours $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

— Avec $p=3x$ et $q=x$: $\cos 3x+\cos x=2\cos(2x)\cos(x)$.

— L'équation devient $2\cos 2x\cos x=0$, donc $\cos 2x=0$ **ou** $\cos x=0$.

— $\cos 2x=0$: $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, donc $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, soit $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

— $\cos x=0$: $x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=\frac{3\pi}{2}$.

— **Solutions** : $\left\{\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{2}\,;\frac{7\pi}{4}\right\}$.

Réponse. Six solutions : $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 12 – Tangente

— a) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ est définie lorsque $\cos x\neq 0$, c'est-à-dire pour $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

— b) tan est π-périodique et $\tan\frac{\pi}{4}=1$, donc $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

— **Attention** : une seule famille ici (période π), contrairement au cosinus et au sinus.

— c) $1+\tan^2 x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$, en utilisant la relation fondamentale.

Réponse. a) $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ · b) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ · c) via $\cos^2+\sin^2=1$.

Correction de l'exercice 13 – Le cosinus de π/5

a) $\cos 3\theta=\cos(\pi-2\theta)=-\cos 2\theta$.

b) $4c^3-3c=-(2c^2-1)$, soit $4c^3+2c^2-3c-1=0$. On remarque la racine $c=-1$:

$$4c^3+2c^2-3c-1=(c+1)(4c^2-2c-1)$$

c) $c=\cos\frac{\pi}{5}>0$, donc $c\neq -1$ et $4c^2-2c-1=0$: $c=\frac{2\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Seule la racine positive convient : $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

d) $\cos\frac{2\pi}{5}=2c^2-1=2\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{16}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Numériquement : $\frac{1+\sqrt{5}}{4}\approx 0{,}8090=\cos 36^\circ$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

✓ et $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}3090 = \cos 72^\circ$ ✓ (c'est $\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{1}{2\varphi}$, φ nombre d'or).

Réponse. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Correction de l'exercice 14 – Condition de résolubilité de a cos x + b sin x = c

a) $r = \sqrt{a^2+b^2}$: le point $\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ est sur le cercle unité, donc il existe φ avec $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, et

$$a\cos x + b\sin x = r(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = r\cos(x-\varphi)$$

b) $r\cos(x-\varphi)$ prend exactement les valeurs de $[-r, r]$: solutions $\Leftrightarrow |c| \le r \Leftrightarrow c^2 \le a^2+b^2$.

c) $r = \sqrt{9+16} = 5$: solutions si et seulement si $m \in [-5, 5]$.

d) $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, $\varphi = \arctan\frac{4}{3}$. L'équation devient $\cos(x-\varphi) = 1$, soit $x = \arctan\frac{4}{3} + 2k\pi$ ($\approx 0{,}927$ rad). Contrôle : $3\times\frac{3}{5} + 4\times\frac{4}{5} = 5$ ✓

Réponse. Solutions $\Leftrightarrow c^2 \le a^2+b^2$; $m \in [-5, 5]$; $x = \arctan\frac{4}{3} + 2k\pi$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète

a) Ici $a = 1$ (coefficient de $\cos x$) et $b = 1$ (coefficient de $\sin x$).

— $A = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

b) Le cosinus varie entre -1 et 1, donc f varie entre $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

— Maximum $\sqrt{2}$ lorsque $x - \frac{\pi}{4} = 0$, soit $x = \frac{\pi}{4}$.

— Minimum $-\sqrt{2}$ lorsque $x - \frac{\pi}{4} = \pi$, soit $x = \frac{5\pi}{4}$.

c) $f(x) = 0$ équivaut à $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, donc $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

— $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, soit dans $[0\,;2\pi]$: $x = \frac{3\pi}{4}$ et $x = \frac{7\pi}{4}$.

— Contrôle : $\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ ✓.

Réponse. a) $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ · b) max $\sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{4}$, min $-\sqrt{2}$ en $\frac{5\pi}{4}$ · c) $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).