Plaquette 3 – Formules de trigonométrie : démonstrations et transformations

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Addition : $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$, $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

— **Duplication** : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

— **Produits en sommes** : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

— **Euler** : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, pour linéariser :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

— **Arc moitié** $t = \tan \frac{x}{2}$: $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Correction de l’exercice 1 – Démontrer la formule d’addition

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; et $= \|OA\|\|OB\| \cos(b-a) = \cos(b-a)$ (l’angle orienté de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OB}$ est $b-a$).

b) Égalité des deux expressions.

c) On remplace a par $-a$: $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Puis $\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

d) $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \approx -0{,}2588$ ✓ ($\cos 105^\circ$).

Réponse. $\cos(b-a) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$; $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Correction de l’exercice 2 – Tangentes de π/12 et 5π/12

a) Pour a, b, $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: on divise $\dfrac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$ par $\cos a \cos b$.

b)

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}2679$$

c) $\tan\frac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$, et $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$: les angles sont **complémentaires** ($\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$), et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x}$.

d) $\tan(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}) = \dfrac{1/2 + 1/3}{1 - 1/6} = 1$, et la somme est dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: elle vaut $\frac{\pi}{4}$.

Réponse. $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$, $\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$; $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Formules de l’arc moitié

a) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1-t^2)$ et $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$; de même $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2t\cos^2\frac{x}{2}$.

b) $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1-t^2} = 1$ avec $t = \tan\frac{\pi}{8} > 0$: $t^2 + 2t - 1 = 0$,

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$$

c) L’angle inscrit $I\hat{A}M$ vaut la moitié de l’angle au centre x : la pente de (AM) est $\tan\frac{x}{2} = t$. Le paramétrage rationnel du cercle s’obtient en coupant par les droites issues de A.

d) $t = \frac{1}{3}$: $\cos x = \frac{8/9}{10/9} = \frac{4}{5}$, $\sin x = \frac{2/3}{10/9} = \frac{3}{5}$; $\frac{16+9}{25} = 1$ ✓ (triplet 3-4-5).

Réponse. $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$; $t = \frac{1}{3}$: $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

Correction de l’exercice 4 – Linéariser par les formules d’Euler

a) $\cos^4 x = \frac{1}{16}(e^{ix} + e^{-ix})^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$:

$$\cos^4 x = \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}$$

b) $\sin^3 x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^3}{(2i)^3} = \frac{2i\sin 3x - 3\cdot 2i\sin x}{-8i} = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

c) Primitive $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$; sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ les sinus s’annulent : $\frac{3\pi}{16}$.

d) $x = 0{,}3$: $\cos^4 x \approx 0{,}83296$ et la formule donne $0{,}83296$ ✓ ; $\sin^3 x \approx 0{,}025808$ ✓

Réponse. $\cos^4 x = \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}$; $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; $\int_0^{\pi/2} \cos^4 = \frac{3\pi}{16}$.

Correction de l’exercice 5 – Produits de cosinus remarquables

a) $P = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$: $\sin\frac{\pi}{5}P = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$, donc $P = \frac{1}{4}$.

b) De même, en multipliant par $\sin\frac{\pi}{7}$ et en appliquant trois fois la duplication :

$$\sin\frac{\pi}{7}\,Q = \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{7} \quad\Longrightarrow\quad Q = -\frac{1}{8}$$

c) Récurrence : $\sin x \prod_{k<n}\cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ (chaque étape double l’angle et divise par 2).

d) $0{,}90097 \times 0{,}62349 \times (-0{,}22252) \approx -0{,}1250$ ✓

Réponse. $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$; $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

Correction de l’exercice 6 – Identité conditionnelle dans un triangle

a) $a + b = \pi - c$ et $\tan(\pi - c) = -\tan c$.

b) $\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} = -\tan c$; en chassant le dénominateur :

$$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a\tan b\tan c$$

c) Équilatéral : $3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3$ ✓ ; $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $c = \frac{5\pi}{12}$: $1 + \sqrt{3} + (2+\sqrt{3}) = 3 + 2\sqrt{3}$ et $1 \times \sqrt{3} \times (2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 3$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Tangentes positives ; avec $S = P$ (somme = produit) et $S \geq 3P^{1/3}$: $P \geq 3P^{1/3}$, soit $P^{2/3} \geq 3$, $P \geq 3\sqrt{3}$ (égalité pour le triangle équilatéral).

Réponse. $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$; dans un triangle acutangle ce produit est $\geq 3\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 7 – Le produit de Viète

a) $n = 1$: $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ✓ Hérédité : $\sin \frac{x}{2^n} = 2 \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cos \frac{x}{2^{n+1}}$.

b) $2^n \sin \frac{x}{2^n} \to x$ (car $\sin u \sim u$), donc

$$\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin x}{x}$$

c) $x = \frac{\pi}{2}$: $\prod \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{2}{\pi}$, avec $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (par $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$), etc.

d) Produit des cinq cosinus $\approx 0{,}454945$ et $\frac{\sin 2}{32 \sin(2/32)} \approx 0{,}454945$ ✓

Réponse. $\prod_{k \leq n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)} \to \frac{\sin x}{x}$; Viète pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Sinus de π/10

a) $2\theta + 3\theta = \frac{\pi}{2}$: $\sin 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \cos 3\theta$.

b) $2 \sin\theta \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$; on divise par $\cos\theta \neq 0$: $2s = 4(1 - s^2) - 3$, soit

$$4s^2 + 2s - 1 = 0$$

c) $s = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$, et $s > 0$: $s = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Puis $\cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2s^2 = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

d) $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}30902 = \sin 18^\circ$ ✓ ; $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2\varphi}$ et $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2}$ (φ nombre d'or).

Réponse. $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Correction de l'exercice 9 – Inégalité |sin nx| ≤ n |sin x|

a) $|\sin a \cos b + \cos a \sin b| \leq |\sin a||\cos b| + |\cos a||\sin b| \leq |\sin a| + |\sin b|$.

b) $n = 0$: $0 \leq 0$ ✓ Hérédité avec a) :

$$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)| + |\sin x| \leq (n+1)|\sin x|$$

c) $\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin nx}{nx} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot n \to n$: la constante n ne peut pas être diminuée.

d) Par b) et $|\sin x| \leq |x|$. La majoration b) est meilleure (elle reste bornée par n quand x est grand, contrairement à $n|x|$).

Réponse. $|\sin(a+b)| \leq |\sin a| + |\sin b|$; $|\sin nx| \leq n|\sin x|$, constante optimale.

Correction de l'exercice 10 – Dérivées successives

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \cos' x$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = \sin' x$.

b) Si $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, on dérive avec a) : $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ ✓ De même pour le sinus.

c) Chaque dérivation multiplie par a et ajoute $\frac{\pi}{2}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\cos(ax+b) = a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

d) $\cos^2 x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$: pour $n \geq 1$, $(\cos^2)^{(n)}(x) = 2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. Contrôle $n=1$: $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x = -2\sin x\cos x$ ✓

Réponse. $\cos^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$; $(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$; $(\cos^2)^{(n)} = 2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

Correction de l’exercice 11 – Le courant triphasé

a) $f(x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ix}(1+j+j^2)\right)$ avec $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$, et $1+j+j^2 = 0$.

b) Les trois points forment un triangle équilatéral centré en O : leur isobarycentre est O, donc la somme des abscisses est nulle (ainsi que celle des ordonnées).

c) Linéarisation : $g(x) = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{8\pi}{3}\right)\right]$, et le crochet est nul par a) (angles $2x$, $2x+\frac{4\pi}{3}$, $2x+\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π) :

$$g(x) = \frac{3}{2}$$

d) La puissance instantanée est proportionnelle à g : constante, ce qui évite les vibrations des machines (contrairement au monophasé, où $\cos^2 x$ oscille).

Réponse. $f \equiv 0$; $g \equiv \frac{3}{2}$ (puissance triphasée constante).

Correction de l’exercice 12 – Somme des sinus des angles d’un triangle

a) $\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ et $\sin\frac{a+b}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right) = \cos\frac{c}{2}$.

b) Duplication ; $\frac{c}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{a+b}{2}$.

c) Somme $= 2\cos\frac{c}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\right] = 2\cos\frac{c}{2}\cdot 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$:

$$\sin a+\sin b+\sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

d) Équilatéral : $3\times\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}598$ et $4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \approx 2{,}598$ ✓ Rectangle isocèle ($a=b=\frac{\pi}{4}$, $c=\frac{\pi}{2}$) : $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1 = 1+\sqrt{2}$, et $4\cos^2\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4} = 4\times\frac{2+\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}+1$ ✓

Réponse. $\sin a+\sin b+\sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$.

Correction de l’exercice 13 – Polynômes de Tchebychev

a) $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ avec $p=(n+1)x$, $q=(n-1)x$.

b) Récurrence double : si $\cos(nx) = T_n(\cos x)$ et $\cos((n-1)x) = T_{n-1}(\cos x)$, alors a) donne $\cos((n+1)x) = 2\cos x\,T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x)$.

c) $T_2 = 2X^2-1$, $T_3 = 4X^3-3X$, $T_4 = 8X^4-8X^2+1$,

$$T_5 = 16X^5-20X^3+5X$$

d) $\cos 1{,}5 \approx 0{,}070737$ et $T_5(\cos 0{,}3) \approx 0{,}070737$ ✓ Coefficient dominant 2^{n-1} ($n \geq 1$).

Réponse. $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$; $T_5 = 16X^5-20X^3+5X$; coefficient dominant 2^{n-1}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Périodicité

a) $\sin 3x$ est $\frac{2\pi}{3}$-périodique et $\cos 2x$ est π-périodique : 2π est une période. Si T est une période de f, c’en est une de $f'' + 4f = -5\sin 3x$ et de $f'' + 9f = 5\cos 2x$, donc $T \in \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \cap \pi\mathbb{Z} = 2\pi\mathbb{Z}$: la plus petite période est 2π.

b) Périodes 3π et 4π ; plus petit multiple commun :

$$\text{ppcm}(3\pi, 4\pi) = 12\pi$$

c) Si $h(x+T) = h(x)$ pour tout x, alors $h'' + h$ aussi est T-périodique : $h''(x) + h(x) = (1-2)\sin(\sqrt{2}\,x) = -\sin(\sqrt{2}\,x)$, donc $T \in \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\mathbb{Z}$. De même $2h + h'' = \sin x$ impose $T \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc $T = 2k\pi = k'\pi\sqrt{2}$: $\sqrt{2} = \frac{2k}{k'} \in \mathbb{Q}$ si $T \neq 0$, absurde.

d) Le motif se répète toutes les 2π sur le graphique.

Réponse. f : période 2π ; g : 12π ; h non périodique ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : cos(2π/7) et une équation du troisième degré

a) $\sum_{k=0}^{6} \cos\frac{2k\pi}{7} = 0$, et $\cos\frac{2k\pi}{7} = \cos\frac{2(7-k)\pi}{7}$: $1 + 2(c_1 + c_2 + c_3) = 0$.

b) $c_1c_2 = \frac{1}{2}(c_3 + c_1)$, $c_2c_3 = \frac{1}{2}(\cos\frac{10\pi}{7} + c_1) = \frac{1}{2}(c_2 + c_1)$, $c_3c_1 = \frac{1}{2}(\cos\frac{8\pi}{7} + c_2) = \frac{1}{2}(c_3 + c_2)$. Somme : $c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{1}{2}$.

c) $c_1c_2c_3 = \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$; par l’exercice 5 (réordonné), $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$, donc $c_1c_2c_3 = \frac{1}{8}$.

d) Relations coefficients-racines :

$$X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0$$

— $c_1 \approx 0{,}62349$: $8 \times 0{,}24237 + 4 \times 0{,}38874 - 2{,}49396 - 1 \approx 0$ ✓

Réponse. $\sum c_k = -\frac{1}{2}$, $\sum c_ic_j = -\frac{1}{2}$, $\prod c_k = \frac{1}{8}$: racines de $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).