Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : trigonométrie et géométrie

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dans un triangle de côtés a, b, c opposés aux angles A, B, C, de rayon circonscrit R :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

— **Aire** : $A = \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ (Héron).

— **Superposition** : $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ (battements).

— **Tangente d'une différence** : $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ (angles de vue).

Correction de l'exercice 1 – Loi des sinus et cercle circonscrit

a) Les angles inscrits $B\hat{A}C$ et $B\hat{A}'C$ interceptent le même arc BC ; $[BA']$ est un diamètre, donc $B\hat{C}A'$ est droit.

b) Dans $BA'C$ rectangle en C : $BC = BA'\sin B\hat{A}'C = 2R\sin A$. De même pour b et c :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

c) $2R = \frac{6}{\sin(\pi/3)} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{3}$. $b = 4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{6} \approx 4{,}90$. $C = \frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $c = \sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}+\sqrt{6} \approx 6{,}69$.

d) $A = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{6}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2} = 9+3\sqrt{3} \approx 14{,}2$.

Réponse. $R = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{6}$, $c = 3\sqrt{2}+\sqrt{6}$; aire $9+3\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 2 – Al-Kashi et Héron

a) $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

b) $\cos A = \frac{25+64-49}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$: $A = \frac{\pi}{3}$.

c) $\frac{1}{2}\times 5\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$. Héron : $s = 10$,

$$A = \sqrt{10\times 3\times 5\times 2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32 \ \checkmark$$

d) $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{7}{\sqrt{3}/2}$, $R = \frac{7}{\sqrt{3}} \approx 4{,}04$; $r = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Réponse. $A = \frac{\pi}{3}$; aire $10\sqrt{3}$; $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$, $r = \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 3 – Le triangle inscrit d'aire maximale

a) $A = \frac{1}{2}bc\sin A$ avec $b = 2\sin B$, $c = 2\sin C$.

b) $\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \le \frac{1}{2}[1-\cos(A+B)] = \sin^2\frac{A+B}{2}$, égalité si $A = B$.

c) On combine avec l'inégalité $\sin a + \sin b + \sin c \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ de la plaquette 4, ou

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

directement : à C fixé, b) montre qu'il faut $A = B$; par symétrie des rôles, le maximum est atteint pour $A = B = C = \frac{\pi}{3}$:

$$A_{\max} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}299$$

d) $\frac{3\sqrt{3}/4}{\pi} \approx 41$ % du disque.

Réponse. $A = 2\sin A \sin B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$, maximum pour le triangle équilatéral.

Correction de l'exercice 4 – Oscillateur harmonique

a) $x'' = -4x$ pour ces fonctions ✓ $x(0) = A = 1$; $x'(0) = 2B = 2\sqrt{3}$, $B = \sqrt{3}$.

b) $X = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$x(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

c) Maximum quand $2t - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$: premier instant $t = \frac{\pi}{6}$.

d) Période $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, amplitude 2, premier maximum en $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$ ✓

Réponse. $x(t) = \cos 2t + \sqrt{3}\sin 2t = 2\cos(2t - \frac{\pi}{3})$; maximum en $t = \frac{\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 5 – Battements

a)

$$\cos(10t) + \cos(11t) = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{21t}{2}\right)$$

b) Porteuse $\cos(10{,}5t)$ (pulsation moyenne) ; enveloppe $2\cos\frac{t}{2}$, lente.

c) $|\cos\frac{t}{2}|$ est 2π-périodique : l'intensité passe par un maximum toutes les 2π (visible sur la courbe).

d) Les fréquences f_1, f_2 donnent une enveloppe de fréquence $\frac{f_2 - f_1}{2}$ et un battement (maximum de $|\cdot|$) à la fréquence $f_2 - f_1 = 2$ Hz : deux battements par seconde (c'est ainsi qu'on accorde un instrument).

Réponse. $s = 2\cos\frac{t}{2}\cos\frac{21t}{2}$; battements de période 2π ; $442 - 440 : 2$ battements par seconde.

Correction de l'exercice 6 – Passer une échelle dans un couloir

a) L'échelle se décompose en deux morceaux de part et d'autre du coin : l'un traverse le couloir de largeur 1 sous l'angle θ (longueur $\frac{1}{\cos\theta}$), l'autre le couloir de largeur 8 (longueur $\frac{8}{\sin\theta}$).

b) $L'(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{8\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^3\theta - 8\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$, du signe de $\tan^3\theta - 8$: négatif puis positif, nul pour $\tan\theta = 2$.

c) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$:

$$L_{\min} = \sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ m}$$

— (formule générale $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2} = (1+4)^{3/2}$ ✓).

d) Une échelle doit « passer » pour **toutes** les positions : elle doit être plus courte que le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

minimum de L. Longueur maximale $5\sqrt{5} \approx 11{,}18$ m.

Réponse. $L(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{8}{\sin\theta}$ minimale pour $\tan\theta = 2$: $5\sqrt{5} \approx 11{,}18$ m.

Correction de l'exercice 7 – Le meilleur angle de vue

a) Les angles de visée du haut et du bas sont $\arctan\frac{3}{x}$ et $\arctan\frac{1}{x}$. Par la formule de $\tan(\alpha-\beta)$:

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{2x}{x^2+3}$$

b) $g(x) = \frac{2x}{x^2+3}$, $g'(x) = \frac{2(3-x^2)}{(x^2+3)^2}$: maximum en $x = \sqrt{3}$; $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et tan croissante.

c) $\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\theta_{\max} = \frac{\pi}{6}$ (30°) ; contrôle : $\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ ✓

d) $\tan\theta = \frac{(b-a)x}{x^2+ab}$, maximal pour $x^2 = ab$ (IAG : $x + \frac{ab}{x} \geq 2\sqrt{ab}$).

Réponse. $\tan\theta = \frac{2x}{x^2+3}$; distance optimale $\sqrt{3}$ m, angle $\frac{\pi}{6}$; en général $\sqrt{ab}$.

Correction de l'exercice 8 – Radicaux emboîtés

a) $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ et $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$ sur $[0, \pi]$.

b) Récurrence : $2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ ($n = 1$), et a) avec $\theta = \frac{\pi}{2^{n+1}}$:

$$2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 0{,}98079$ ✓

d) $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \to 2$, et $2 - u_n = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \sim \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4^{n+1}}$.

Réponse. $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \to 2$, $2 - u_n \sim \frac{\pi^2}{4^{n+1}}$.

Correction de l'exercice 9 – Le nombre de Dottie

a) $h(x) = \cos x - x$: strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ ($h' = -\sin x - 1 \leq 0$, nul en des points isolés), $h(0) = 1 > 0$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Pour $x < 0$, $\cos x > x$; pour $x > 1$, $\cos x \leq 1 < x$. Unique solution, dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) cos est décroissante sur $[0,1]$: image $[\cos 1, 1] \approx [0{,}54, 1]$. Et $|\cos x - \cos y| \leq \sin 1\,|x-y|$ (accroissements finis, $|\sin| \leq \sin 1$ sur $[0,1]$).

c) $|x_{n+1} - \alpha| = |\cos x_n - \cos\alpha| \leq (\sin 1)|x_n - \alpha|$, donc

$$|x_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n |x_0 - \alpha| \to 0$$

d) $\cos 0{,}739085 \approx 0{,}739085$ ✓ Avec $\sin 1 \approx 0{,}841$: $0{,}841^n \times 0{,}26 \leq 10^{-6}$ pour $n \geq 72$ (en pratique le rapport tend vers $\sin\alpha \approx 0{,}674$, d'où ≈ 35 itérations).

Réponse. Unique solution $\alpha \approx 0{,}739085$; point fixe contractant de rapport $\sin 1$; $|x_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n |x_0 - \alpha|$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – La suite des sinus itérés

a) Par récurrence, $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ (car sin envoie cet intervalle dans $]0,1]$) ; et $u_{n+1} = \sin u_n \le u_n$.

b) Décroissante minorée par 0 : converge vers $\ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; par continuité, $\sin \ell = \ell$. Or $\sin x < x$ pour $x > 0$: $\ell = 0$.

c) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin u_n}{u_n} \to 1$: le rapport tend vers 1, convergence plus lente que toute suite géométrique.

d) On montre (plus tard) que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$; à $n = 100$:

$$u_{100} \approx 0{,}169 \quad \text{contre} \quad \sqrt{0{,}03} \approx 0{,}173$$

— l’accord est déjà bon (écart relatif 2,5 %).

Réponse. (u_n) décroît vers 0, avec $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$; $u_n \sim \sqrt{3/n}$.

Correction de l’exercice 11 – Une identité dans le triangle

a) $C = \pi - (A + B)$.

b) $\cos C(\cos C + 2\cos A\cos B) = \cos C(\sin A \sin B + \cos A \cos B) = \cos C \cos(A - B)$, et $\cos C = -\cos(A + B)$:

$$-\cos(A+B)\cos(A-B) = -\cos^2 A + \sin^2 B = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B$$

— (formule $\cos(p+q)\cos(p-q) = \cos^2 p - \sin^2 q$).

c) Équilatéral : $3 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} = 1$ ✓ Rectangle en A : $0 + \cos^2 B + \sin^2 B + 0 = 1$ ✓

d) Par b), $\sum \cos^2 = 1 \Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C = 0 \Leftrightarrow$ un angle est droit.

Réponse. $\sum \cos^2 + 2\prod \cos = 1$; rectangle $\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$.

Correction de l’exercice 12 – La formule de Machin

a) $\tan 2\alpha = \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{5}{12}$; $\tan 4\alpha = \frac{10/12}{1 - 25/144} = \frac{5/6}{119/144} = \frac{120}{119}$.

b)

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1/119}{239/119} = \frac{1}{239}$$

c) $\alpha < \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\tan 4\alpha > 1$ proche de 1 : $4\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $4\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et vaut $\arctan \frac{1}{239}$. Contrôle numérique : $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \approx 0{,}785398 = \frac{\pi}{4}$ ✓

d) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ converge très vite pour $x = \frac{1}{5}$ et $x = \frac{1}{239}$ (gain d’environ 1,4 décimale par terme pour $\frac{1}{5}$) : Machin a obtenu 100 décimales en 1706.

Réponse. $\tan 4\alpha = \frac{120}{119}$, $\tan(4\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239} : \frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.

Correction de l’exercice 13 – Somme de carrés de cosinus décalés

a) $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$ avec $2u = 2x + \frac{2k\pi}{n}$.

b) C’est la partie réelle de $e^{2ix}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ avec $\omega = e^{2i\pi/n} \neq 1$ ($n \ge 2$), somme nulle.

c)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}$$

d) Pour $n = 3$, les décalages $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ donnent, au signe près des cosinus, les phases $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ (car $\cos^2(u+\pi) = \cos^2 u$) : on retrouve $g \equiv \frac{3}{2}$.

Réponse. $\sum_{k<n} \cos^2(x + \frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2}$ pour tout x.

Correction de l'exercice 14 – Distance d'un point à une droite et angle

a) $\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta, \sin\theta)$; la distance est la norme du produit « vectoriel » avec le vecteur unitaire de D : $r|\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta| = r|\sin(\theta-\alpha)|$.

b) Projection : $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u} = r(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = r\cos(\theta-\alpha)$.

c) $r = 5$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$; $\sin(\theta-\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$:

$$d(M, D) = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$$

d) $D : x - y = 0$: $\frac{|3-4|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓

Réponse. $d = r|\sin(\theta-\alpha)|$; pour $M(3,4)$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : angles d'un triangle en progression arithmétique

a) $A + B + C = 3B = \pi$.

b) $\sin A + \sin C = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos d = \sqrt{3}\cos d$;
$\sin A\sin C = \frac{1}{2}[\cos(-2d) - \cos\frac{2\pi}{3}] = \frac{1}{2}\cos 2d + \frac{1}{4}$.

c) Loi des sinus : $a + c = 2b \Leftrightarrow \sin A + \sin C = 2\sin B \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos d = \sqrt{3}$:

$$\cos d = 1 \Leftrightarrow d = 0$$

— le triangle est équilatéral.

d) $2R = \frac{b}{\sin B} = 2$; $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{1}{2}$, $A = \frac{\pi}{6}$ (car $A < \frac{\pi}{3}$), donc $d = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{\pi}{2}$ et $c = 2R\sin C = 2$. Contrôle : $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2$ ✓ (triangle 30-60-90).

Réponse. $B = \frac{\pi}{3}$; côtés en progression ⇒ équilatéral ; $b = \sqrt{3}$, $a = 1$: $d = \frac{\pi}{6}$, $c = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).